

Marjeta ŠKAPIN-RUGELJ

Kontinuitetna enačba in prometni tok

Povzetek. Naš cilj je poiskati matematični model prometnega toka. Ker se število avtomobilov ohranja, velja kontinuitetna enačba

$$(1) \quad u_t + f(u)_x = 0,$$

kjer je $u : \mathbb{R} \times [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ gostota avtomobilov in $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pretok. Enačbi (1) dodamo še začetni pogoj

$$(2) \quad u(x, 0) = h(x).$$

Za reševanje začetnega problema (1)-(2) lahko uporabimo metodo karakteristik. Karakteristike so krivulje v (x, t) -ravnini, vzdolž katerih je funkcija u konstantna. V našem primeru so oblike

$$(3) \quad x(t) = \xi + f'(h(\xi))t, \quad \xi \in \mathbb{R}.$$

Če obstaja C^1 -rešitev $u(x, t)$, je njen graf v \mathbb{R}^3 enak

$$(4) \quad \Gamma := \{(x, t, y) = (\xi + f'(h(\xi))t, t, h(\xi)) \mid \xi \in \mathbb{R}, t \geq 0\}.$$

Klasična rešitev ne ostaja vedno niti za gladke začetne pogoje, zato vpeljemo pojem šibke rešitve, ki pa jih je lahko več. Med njimi moramo poiskati tisto, ki zadošča entropijskemu pogoju.