Definicija 0.1. *Naj bo* $\overrightarrow{G} = (V, \overrightarrow{E})$ *usmerjen graf,* $w \in V$ *in* $I_v = [0,1]$ *za vsak* $v \in V$*. Potem bomo označili:*

1. $\pi_u : \prod_{v \in V} I_v \to I_u$ *je projekcija, za katero velja* $\pi_u((t_v)_{v \in V}) = t_u$ *za vsak* $u \in V$*,*
2. $p_u^w : \prod_{v \in V \setminus \{w\}} I_v \to I_u$ *je projekcija, za katero velja* $p_u^w((t_v)_{v \in V \setminus \{w\}}) = t_u$ *za vsak* $u \in V \setminus \{w\}$*,*
3. $q_u^w : \prod_{v \in N(w) \cup \{w\}} I_v \to I_u$ *je projekcija, za katero velja* $q_u^w((t_v)_{v \in N(w) \cup \{w\}}) = t_u$ *za vsak* $u \in N(w) \cup \{w\}$*.*

Prav tako definiramo tudi:

4. $\pi_U : \prod_{v \in V} I_v \to \prod_{v \in U} I_v$ *je projekcija, za katero velja* $\pi_U((t_v)_{v \in V}) = (t_v)_{v \in U}$ *za vsak* $U \subseteq V$*,*
5. $p_U^w : \prod_{v \in V \setminus \{w\}} I_v \to \prod_{v \in U} I_v$ *je projekcija, za katero velja* $p_U^w((t_v)_{v \in V \setminus \{w\}}) = (t_v)_{v \in U}$ *za vsak* $U \subseteq V \setminus \{w\}$*,*
6. $q_U^w : \prod_{v \in N(w) \cup \{w\}} I_v \to \prod_{v \in U} I_v$ *je projekcija, za katero velja* $q_U^w((t_v)_{v \in N(w) \cup \{w\}}) = (t_v)_{v \in U}$ *za vsak* $U \subseteq N(w) \cup \{w\}$*.*

Nazadnje definiramo še:

7. $\pi_{(r,s)} : \prod_{v \in V} I_v \to I_r \times I_s$ *je projekcija, za katero velja* $\pi_{(r,s)}((t_v)_{v \in V}) = (t_r, t_s)$ *za vsak* $(r,s) \in \overrightarrow{E}$*,*
8. $p_{(r,s)}^w : \prod_{v \in V \setminus \{w\}} I_v \to I_r \times I_s$ *je projekcija za katero velja* $p_{(r,s)}^w((t_v)_{v \in V \setminus \{w\}}) = (t_r, t_s)$ *za vsak* $(r,s) \in \overrightarrow{E} \setminus \overrightarrow{E}(w)$*,*
9. $q_{(r,s)}^w : \prod_{v \in N(w) \cup \{w\}} I_v \to I_r \times I_s$ *je projekcija za katero velja* $q_{(r,s)}^w((t_v)_{v \in N(w) \cup \{w\}}) = (t_r, t_s)$ *za vsak* $(r,s) \in \overrightarrow{E}(w)$*.*

Veliki kontinuumi v inverznih limitah

2. december 2020

Kontinuum

Definicija

Kontinuum *je neprazen povezan kompakten metrični prostor. Vsak podprostor kontinuuma X imenujemo* podkontinuum, *če je tudi sam kontinuum.*

Izrek

Naj bosta X, Y metrična prostora in $f : X \to Y$ homeomorfizem. Če je X kontinuum, je tudi Y kontinuum.

Hiperprostori

Definicija

Naj bo (X, d) *metrični prostor. Z*
$2^X = \{U \subseteq X \mid U \neq \emptyset,\ X \backslash U \text{ odprta v } X\}$ *bomo označevali množico vseh zaprtih nepraznih podmnožic množice* X.

Definicija

Naj bo (X, d) *metrični prostor,* $U \in 2^X$ *in* $\epsilon > 0.$ *Potem je*
$N_d(\epsilon, U) = \{x \in X \mid \text{obstaja } u \in U, \text{ da je } d(u, x) < \epsilon\}.$
To množico imenujemo epsilonska okolica množice U.

Hiperprostori

Definicija

Naj bo (X, d) metrični prostor. Potem funkciji $H_d : 2^X \times 2^X \to \mathbb{R}$ s predpisom $H_d(U, V) = \inf\{\epsilon > 0 \mid U \subseteq N_d(\epsilon, V),\ V \subseteq N_d(\epsilon, U)\}$ pravimo Hausdorffova metrika.

Definicija

Naj bo (X, d) metrični prostor. Potem paru $(2^X, H_d)$ pravimo hiperprostor prostora X.

Inverzne limite

Definicija

Naj bo za vsak $n \in \mathbb{N}$, (X_n, d_n) *metrični prostor in* $f_n : (X_{n+1}, d_{n+1}) \to (X_n, d_n)$ *zvezna funkcija. Potem dvojnemu zaporedju* $\{X_n, f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *pravimo inverzno zaporedje. Metrične prostore* X_n *imenujemo faktorski prostori, funkcije* f_n *pa vezne funkcije.*

Definicija

Naj bo $\{X_n, f_n\}_{n=1}^{\infty}$ *inverzno zaporedje. Potem je inverzna limita tega inverznega zaporedja podprostor topološkega produkta* $\prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$, *ki je definiran kot*

$$\varprojlim \{X_n, f_n\}_{n=1}^{\infty} = \{(x_1, x_2, \dots) \in \prod_{n \in \mathbb{N}} X_n \mid f_n(x_{n+1}) = x_n \text{ za vsak } n \in \mathbb{N}\}.$$

Izrek

Naj bo $\{X_n, f_n\}_{n=1}^{\infty}$ inverzno zaporedje nepraznih kompaktnih metričnih prostorov. Potem je inverzna limita tega zaporedja neprazen kompakten metrični prostor.

Zgled. Naj bo za vsak $n \in \mathbb{N}$, $X_n = [0, 1]$ opremljen z evklidsko metriko. Naj bo še za vsak $n \in \mathbb{N}$, $f_n : X_{n+1} \to X_n$ funkcija s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & x \leq \frac{1}{2} \\ -x + \frac{3}{2}, & x \geq \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Potem je inverzna limita $\varprojlim\{X_n, f_n\}_{n=1}^{\infty}$ sin $\frac{1}{x}$-kontinuum.

Večlične funkcije

Definicija

Naj bosta (X, d_1) *in* (Y, d_2) *kompaktna metrična prostora. Potem funkciji* $f : X \to 2^Y$ *pravimo večlična funkcija in pišemo* $f : X \multimap Y$.

Definicija

Naj bo $f : X \multimap Y$ *večlična funkcija. Graf funkcije* f*, oznaka* $\Gamma(f)$*, je množica* $\Gamma(f) = \{(x, y) \in X \times Y \mid y \in f(x)\}$.

Definicija

Naj bo $f : X \multimap Y$ *večlična funkcija. Pravimo, da je graf funkcije* f *surjektiven, če za vsak* $y \in Y$ *obstaja tak* $x \in X$*, da je* $y \in f(x)$.

Večlične funkcije

Definicija

Naj bodo (X_1, d_1), (X_2, d_2), (X_3, d_3) *metrični prostori in* $f : X_1 \multimap X_2$ *ter* $g : X_2 \multimap X_3$ *večlični funkciji. Potem za vsak* $x \in X_1$ *definiramo* $(g \circ f)(x) = \bigcup_{y \in f(x)} g(y)$.

Definicija

Naj bosta (X, d_1) *in* (Y, d_2) *kompaktna metrična prostora in* $f : X \multimap Y$ *večlična funkcija. Pravimo, da je* f *navzgor polzvezna, če je za vsako odprto množico* $A \subseteq Y$ *množica* $\{a \mid f(a) \subseteq A\}$ *odprta v* X .

Izrek

Funkcija f *navzgor polzvezna natanko takrat, ko je* $\Gamma(f)$ *zaprt v* $X \times Y$.

Posplošene inverzne limite

Definicija

Naj bo za vsak $n \in \mathbb{N}$, (X_n, d_n) kompakten metrični prostor in $f_n : X_{n+1} \multimap X_n$ navzgor polzvezna večlična funkcija. Potem dvojnemu zaporedju $\{X_n, f_n\}_{n=1}^{\infty}$ rečemo posplošeno inverzno zaporedje.

Definicija

Naj bo za vsak $n \in \mathbb{N}$, (X_n, d_n) kompakten metrični prostor in $f_n : X_{n+1} \multimap X_n$ navzgor polzvezna večlična funkcija. Posplošena inverzna limita posplošenega inverznega zaporedja $\{X_n, f_n\}_{n=1}^{\infty}$ je podprostor topološkega produkta $\prod_{n \in \mathbb{N}} X_n$, ki je definiran kot

$$\varprojlim \{X_n, f_n\} = \{(x_1, x_2, \ldots) \in \prod_{n \in \mathbb{N}} X_n \mid x_n \in f_n(x_{n+1}) \text{ za vsak } n \in \mathbb{N}\}.$$

Posplošene inverzne limite

Zgled. Naj bo $f : [0,1] \multimap [0,1]$, tako de je $\Gamma(f) = [0,1] \times \{0,1\}$ tedaj je inverzna limita $\varprojlim \{[0,1], f\} = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Opazimo,da je ta prostor neprazen, kompakten popolnoma nepovezan in brez izoliranih točk, torej je Cantorjeva množica.

Posplošene dvostrane inverzne limite

Definicija

Naj bo za vsak $z \in \mathbb{Z}$, (X_z, d_z) kompakten metrični prostor in $f_z : X_{z+1} \multimap X_z$ navzgor polzvezna večlična funkcija. Dvojnemu zaporedju $\{X_z, f_z\}_{z\in\mathbb{Z}}$ pravimo dvostrano posplošeno inverzno zaporedje.

Definicija

Naj bo za vsak $z \in \mathbb{Z}$, (X_z, d_z) kompakten metrični prostor in $f_z : X_{z+1} \multimap X_z$ navzgor polzvezna večlična funkcija. Posplošena dvostrana inverzna limita inverznega zaporedja $\{X_z, f_z\}_{z\in\mathbb{Z}}$ je podprostor v topološkem produktu $\prod_{z\in\mathbb{Z}} X_z$, ki je definiran kot

$$\underset{\longleftarrow}{\lim}\{X_z, f_z\}_{z\in\mathbb{Z}} = \{(\ldots, x_{-1}, x_0, x_1, \ldots) \in \prod_{z\in\mathbb{Z}} X_z \mid x_z \in f_z(x_{z+1}) \text{ za vsak } z \in \mathbb{Z}\}.$$

Grafi

Definicija

Naj bo $\mathcal{G}$ *družina vseh grafov in naj bo* $\overrightarrow{\mathcal{G}}$ *družina vseh usmerjenih grafov. S* $\psi : \overrightarrow{\mathcal{G}} \to \mathcal{G}$ *bomo označevali funkcijo za katero je* $\psi(V, \overrightarrow{E}) = (V, E)$*, kjer je* $E = \{\{u, v\} \mid (u, v) \in \overrightarrow{E}\}$.

Definicija

Naj bo $\overrightarrow{G}$ *usmerjen graf. Pravimo, da je* $\overrightarrow{G}$ *povezan, če je* $\psi(\overrightarrow{G})$ *povezan. To povezanost ponavadi imenujemo tudi šibka povezanost.*

Izrek

Naj bo $\overrightarrow{G} = (V, \overrightarrow{E})$ *povezan usmerjen graf. Potem obstaja tak* $\overrightarrow{F} \subseteq \overrightarrow{E}$*, da je* $\overrightarrow{T} = (V, \overrightarrow{F})$ *drevo.*

Definicija

Naj bo $\overrightarrow{G} = (V, \overrightarrow{E})$ *usmerjen graf in naj bo* $w \in V$. *Potem definiramo:*

1. $N(w) = \{v \in V \mid (w, v) \in \overrightarrow{E}$ *ali* $(v, w) \in \overrightarrow{E}\}$ *množica vseh sosedov vozlišča* w,
2. $\overrightarrow{E}(w) = \{(u, v) \in \overrightarrow{E} \mid u = w$ *ali* $v = w\}$ *množica vseh povezav, ki imajo eno krajišče enako* w,
3. $\overrightarrow{G} \backslash \{w\} = (V \backslash \{w\}, \overrightarrow{E} \backslash \overrightarrow{E}(w))$ *usmerjen graf, kjer izvzamemo vozlišče* w *in vse povezave, ki imajo za eno izmed svojih krajišč* w,
4. $\overrightarrow{G}_w = (N(w) \cup \{w\}, \overrightarrow{E}(w))$ *usmerjen graf.*

Inverzni sistemi

Definicija

S $p_1 : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ *bomo označevali prvo projekcijo,* $p_1(s,t) = s$*, in s* $p_2 : [0,1] \times [0,1] \to [0,1]$ *drugo,* $p_2(s,t) = t$*.*

Definicija

Naj bo $f : [0,1] \multimap [0,1]$ *večlična navzgor polzvezna funkcija tako, da je* $\Gamma(f)$ *surjektiven in povezan. Pravimo, da je* f *šibko c-ireducibilna, če za vsak kontinuum* H *v* $\Gamma(f)$*, kjer je* $H \neq \Gamma(f)$*, sledi, da je* $p_1(H) \neq [0,1]$ *ali* $p_2(H) \neq [0,1]$*.*

Definicija

Naj bo $\overrightarrow{G} = (V, \overrightarrow{E})$ *usmerjen graf. Za vsak* $v \in V$ *naj bo* $I_v = [0, 1]$ *in za vsak par* $(u, v) \in \overrightarrow{E}$ *naj bo* $f_{v,u} : I_u \multimap I_v$ *navzgor polzvezna funkcija. Naj bo* $\mathbf{I} = \{I_v \mid v \in V\}$ *in* $\mathbf{f} = \{f_{v,u} \mid (u, v) \in \overrightarrow{E}\}$. *Potem trojico* $(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{G})$ *imenujemo inverzni sistem na grafu* $\overrightarrow{G}$.

Definicija

Naj bo $(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{G})$ *inverzni sistem grafa* $\overrightarrow{G}$.
Inverzna limita inverznega sistema $(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{G})$ *je podprostor topološkega produkta* $\prod_{v \in V} I_v$*, ki je definiran kot:*

$$\varprojlim(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{G}) = \{(t_v)_{v \in V} \in \prod_{v \in V} I_v \mid t_v \in f_{v,u}(t_u) \text{ za vse } (u, v) \in \overrightarrow{E}\}.$$

Mountain climbing theorem

Izrek

Naj bosta $f, g : [0,1] \to [0,1]$ *takšni zvezni funkciji, da je* $f(0) = g(0) = 0$ *in* $f(1) = g(1) = 1$. *Potem obstajata takšni zvezni funkciji* $\alpha, \beta : [0,1] \to [0,1]$, *da je* $\alpha(0) = \beta(0) = 0$, $\alpha(1) = \beta(1) = 1$ *ter velja* $f \circ \alpha = g \circ \beta$

Veliki in debeli kontinuumi

Definicija

Naj bo $(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{G})$ *inverzni sistem nad usmerjenim grafom* $\overrightarrow{G}$ *in naj bo* C *komponenta v* $\varprojlim(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{G})$. *Pravimo, da je* C*:*

1. *debel kontinuum v* $\varprojlim(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{G})$ *z ozirom na* $(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{G})$*, če velja:*

   $\pi_{u,v}(C) = \Gamma(f_{v,u})$ *za vsak par povezav* $(u, v) \in \overrightarrow{E}$*,*
2. *velik kontinuum v* $\varprojlim(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{G})$ *z ozirom na* $(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{G})$*, če velja:* $\pi_u(C) = I_u$ *za vsako vozlišče* $u \in V$.

Veliki in debeli kontinuumi

Izrek

Za vsako naravno število n naj bo $I_n = [0,1]$ in $f_n : I_{n+1} \multimap I_n$ večlična navzgor polzvezna funkcija tako, da je $\Gamma(f_n)$ povezan in surjektiven. Potem obstaja tak kontinuum C v $\varprojlim\{I_n, f_n\}_{n=1}^{\infty}$, da je za vsako naravno število n, $\pi_{n+1,n}(C) = \Gamma(f_n)$, kjer $\pi_{n+1,n} : \prod_{k=1}^{\infty} I_k \to I_{n+1} \times I_n$ projekcija definirana s predpisom $\pi_{n+1,n}(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (x_{n+1}, x_n)$.

Naslednji izrek prevede prejšnji izrek v jezik inverznih limit na inverznih sistemih usmerjenega grafa.

Izrek

Naj bo $\overrightarrow{G} = (\mathbb{N}, \overrightarrow{E})$ *usmerjen graf, kjer je* $\overrightarrow{E} = \{(n, n+1) \mid n \in \mathbb{N}\}$ *in naj bo* $(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{G})$ *inverzni sistem na usmerjenem grafu* $\overrightarrow{G}$*. Če je* $\Gamma(f)$ *surjektiven in povezan za vsak* $f \in \mathbf{f}$*, potem obstaja debel kontinuum v* $\varprojlim(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{G})$*.*

Lema

Naj bo $\overrightarrow{G} = (V, \overrightarrow{E})$ usmerjen graf , $w \in V$ in naj bo $I_v = [0, 1]$ za vsako vozlišče $v \in V$.
Naj bosta še $f : [0, 1] \to \prod_{v \in V \setminus \{w\}} I_v$ in $g : [0, 1] \to \prod_{v \in N(w) \cup \{w\}} I_v$ zvezni funkciji tako, da velja:

$$p^w_{N(w)}(f(t)) = q^w_{N(w)}(g(t))$$

za vsak $t \in [0, 1]$. Potem je

$$h : [0, 1] \to \prod_{v \in V} I_v,$$

definirana kot

$$\pi_{V \setminus \{w\}}(h(t)) = f(t) \quad \text{in} \quad \pi_{N(w) \cup \{w\}}(h(t)) = g(t),$$

dobro definirana zvezna funkcija.

Dokaz. Najprej bomo dokazali, da je h dobro definirana funkcija. Za vsak $v \in V$ velja

$$\pi_v \circ h = \begin{cases} p_v^w \circ f; & v \in V \setminus \{w\}, \\ q_v^w \circ g; & v \in N(w) \cup \{w\}. \end{cases}$$

Potem je $h(t) = ((\pi_v \circ h)(t))_{v \in V}$ za vsak $t \in [0,1]$. Ker je $p_{N(w)}^w(f(t)) = q_{N(w)}^w(g(t))$ za vsak $t \in [0,1]$, velja $p_v^w \circ f = q_v^w \circ g$ za vsak $v \in N(w)$. Torej je h dobro definirana.
S tem smo tudi dokazali, da je h zvezna, saj je $\pi_v \circ h$ zvezna funkcija za vsak $v \in V$. □

Lema

Naj bo V števna množica, $\overrightarrow{G} = (V, \overrightarrow{E})$ usmerjen povezan graf in $w, w_0 \in V$ takšni, da je $N(w) = \{w_0\}$ in $|\overrightarrow{E}(w)| = 1$.
Naj bo še $(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{G})$ inverzni sistem na usmerjenem grafu $\overrightarrow{G}$ takšen, da je $\Gamma(f)$ povezan in surjektiven za vsak $f \in \mathbf{f}$. Naj velja še:

1. *P naj bo kontinuum v $\varprojlim(\mathbf{I}', \mathbf{f}', \overrightarrow{G} \setminus \{w\})$, kjer je*
   $\mathbf{I}' = \{I_v \mid v \in V \setminus \{w\}\}$ *in* $\mathbf{f}' = \{f_{v,u} \mid (u,v) \in \overrightarrow{E} \setminus \overrightarrow{E}(w)\}$ *tako, da je*
   $$p_{w_0}^{w}(P) = I_{w_0},$$
2. *Q naj bo kontinuum v $\varprojlim(\mathbf{I}'', \mathbf{f}'', \overrightarrow{G}_w)$, kjer je*
   $\mathbf{I}'' = \{I_v \mid v \in N(w) \cup \{w\}\}$ *in* $\mathbf{f}'' = \{f_{v,u} \mid (u,v) \in \overrightarrow{E}(w)\}$ *tako, da je*
   $$q_{w_0}^{w}(Q) = I_{w_0}.$$

Lema

Potem obstaja tak kontinuum C v $\varprojlim(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{G})$, da velja

$$\pi_{V\setminus\{w\}}(C) = P \quad \text{in} \quad \pi_{N(w)\cup\{w\}}(C) = Q.$$

Dokaz:
Naj bodo $x_1, y_1 \in P$ in $x_2, y_2 \in Q$ takšne točke, da velja:
$p^w_{w_0}(x_1) = 0$, $p^w_{w_0}(y_1) = 1$, $q^w_{w_0}(x_2) = 0$, in $q^w_{w_0}(y_2) = 1$.
Naj bo (P_n) zaporedje kosoma linearnih lokov v $\prod_{v \in V \setminus \{w\}} I_v$ tako, da je:

1. vsak P_n je lok od x_1 do y_1,
2. $\lim_{n \to \infty} P_n = P$ glede na Hausdorffovo metriko.

Naj bo še (Q_n) zaporedje kosoma linearnih lokov v $\prod_{v \in \{w_0, w\}} I_v$ tako, da je:

1. vsak Q_n je lok od x_2 do y_2,
2. $\lim_{n \to \infty} Q_n = Q$ glede na Hausdorffovo metriko.

Nato za vsak $n \in \mathbb{N}$ definirajmo $f_n : [0, 1] \to P_n$ kosoma linearni homeomorfizem tako, da je $f_n(0) = x_1$ in $f_n(1) = y_1$ ter $g_n : [0, 1] \to Q_n$ kosoma linearni homeomorfizem, da velja $g_n(0) = x_2$ in $g_n(1) = y_2$.
Sedaj opazimo, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja naslednje:

$$(p^w_{w_0} \circ f_n)(0) = p^w_{w_0}(f_n(0)) = p^w_{w_0}(x_1) = 0,$$

$$(p^w_{w_0} \circ f_n)(1) = p^w_{w_0}(f_n(1)) = p^w_{w_0}(y_1) = 1,$$

$$(q^w_{w_0} \circ g_n)(0) = q^w_{w_0}(g_n(0)) = q^w_{w_0}(x_2) = 0,$$

$$(q^w_{w_0} \circ g_n)(1) = q^w_{w_0}(g_n(1)) = q^w_{w_0}(y_2) = 1.$$

(tako imenovan "Mountain climbing theorem") sledi, da za vsak $n \in \mathbb{N}$ obstajta takšni dve funkciji $\alpha_n, \beta_n : [0,1] \to [0,1]$ tako, da je $\alpha_n(0) = \beta_n(0) = 0$ in $\alpha_n(1) = \beta_n(1) = 1$ ter velja

$$p^w_{w_0} \circ f_n \circ \alpha_n = q^w_{w_0} \circ g_n \circ \beta_n.$$

Za vsak $n \in \mathbb{N}$ naj bo $h_n : [0,1] \to \prod_{v \in V} I_v$ funkcija definirana kot

$$\pi_{V \setminus \{w\}}(h_n(t)) = f_n(\alpha_n(t)) \quad \text{in} \quad \pi_{N(w) \cup \{w\}}(h_n(t)) = g_n(\beta_n(t))$$

za vsak $t \in [0,1]$. Potem nam lema pove, da je h_n dobro definirana zvezna funkcija.
Naj bo še $C_n = h_n([0,1])$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. Očitno je, da je C_n kontinuum v $\prod_{v \in V} I_v$, saj je zvezna slika kontinuuma. Prav tako za vsak $n \in \mathbb{N}$ velja

$$\pi_{V \setminus \{w\}}(C_n) = \pi_{V \setminus \{w\}}(h_n([0,1])) = f_n(\alpha_n([0,1])) = P_n$$

in

$$\pi_{N(w) \cup \{w\}}(C_n) = \pi_{N(w) \cup \{w\}}(h_n([0,1])) = g_n(\beta_n([0,1])) = Q_n,$$

saj so vse funkcije $f_n, q_n, \alpha_n, \beta_n$ surjektivne.
Brez izgube za splošnost lahko predpostavimo, da zaporedje (C_n) konvergira v hiperprostoru $2^{\prod_{v\in V} I_v}$. Naj bo $C = \lim_{n\to\infty} C_n$ glede na Hausdorffovo metriko. Očitno je, da je C podkontinuum v Hilbertovem prostoru $\prod_{v\in V} I_v$. Opazimo naslednje

$$\pi_{V\setminus\{w\}}(C) = \pi_{V\setminus\{w\}}(\lim_{n\to\infty} C_n) = \lim_{n\to\infty}(\pi_{V\setminus\{w\}}(C_n)) = \lim_{n\to\infty} P_n = P$$

in

$$\pi_{N(w)\cup\{w\}}(C) = \pi_{N(w)\cup\{w\}}(\lim_{n\to\infty} C_n) = \lim_{n\to\infty}(\pi_{N(w)\cup\{w\}}(C_n)) = \lim_{n\to\infty} Q_n = Q.$$

Dokaz, da je $C \subseteq \underset{\longleftarrow\!\circ}{\lim}(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{G})$ samo ideja. Ločimo dve možnosti

1. $(u, v) \in \overrightarrow{E} \setminus \overrightarrow{E}(w)$,
2. $(u, v) \in \overrightarrow{E}$.

Nato pa pokažemo, da pri obeh velja $t_v \in f_{v,u}(t_u)$.

Lema

Naj bo V končna množica, $|V| > 1$, $\overrightarrow{T} = (V, \overrightarrow{E})$ drevo in naj bo še $(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{T})$ inverzni sistem na usmerjenem grafu $\overrightarrow{T}$ tako, da je $\Gamma(f)$ povezan in surjektiven za vsak $f \in \mathbf{f}$. Potem obstaja debel kontinuum v $\varprojlim(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{T})$.

Veliki in debeli kontinuumi

Dokaz:
Dokažemo s pomočjo indukcije in prejšnje leme. Baza: za C vzamemo kar $\Gamma(f^{-1})$. Naj bo $n \in \mathbb{N}$ poljuben in predpostavimo, da za vsako drevo $\overrightarrow{T} = (V, \overrightarrow{E})$ obstaja debel kontinuum v $\varprojlim(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{T})$, če je $|V| \leq n$.
Naj bo $\overrightarrow{T} = (V, \overrightarrow{E})$, kjer je $|V| = n + 1$ in naj bo $w \in V$ tak, da je $|N(w)| = 1$. Naj bo $N(w) = \{w_0\}$. Potem po indukcijski predpostavki sledita naslednji dve trditvi.

1. Obstaja debel kontinuum P v $\varprojlim(\mathbf{I}', \mathbf{f}', \overrightarrow{T} \setminus \{w\})$, kjer je $\mathbf{I}' = \{I_v \mid v \in V \setminus \{w\}\}$ in $\mathbf{f}' = \{f_{v,u} \mid (u, v) \in \overrightarrow{E} \setminus \overrightarrow{E}(w)\}$.
2. Obstaja debel kontinuum Q v $\varprojlim(\mathbf{I}'', \mathbf{f}'', \overrightarrow{T}_w)$, kjer je $\mathbf{I}'' = \{I_v \mid v \in N(w) \cup \{w\}\}$ in $\mathbf{f}'' = \{f_{v,u} \mid (u, v) \in \overrightarrow{E}(w)\}$.

Ker je P debel kontinuum v $\varprojlim(\mathbf{I}', \mathbf{f}', \overrightarrow{T} \setminus \{w\})$ in Q debel kontinuum v $\varprojlim(\mathbf{I}'', \mathbf{f}'', \overrightarrow{T}_w)$, je $p^w_{w_0}(P) = I_{w_0}$ in $q^w_{w_0}(Q) = I_{w_0}$. Po lemi obstaja tak kontinuum C v $\varprojlim(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{T})$, da velja

$$\pi_{V\setminus\{w\}}(C) = P \quad \text{in} \quad \pi_{N(w)\cup\{w\}}(C) = Q.$$

Ta C debel kontinuum v $\varprojlim(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{T})$.

Zgled. Naj bo $V = \{1, 2, 3\}$, $\overrightarrow{E} = \{(2,1), (3,2), (3,1)\}$ in $\overrightarrow{G} = (V, \overrightarrow{E})$ usmerjen graf.
Za vsak $v \in V$ je $I_v = [0,1]$. Naj bo še $f_{1,2}(t) = \{t\}$, $f_{2,3}(t) = \{t\}$ in $f_{1,3}(t) = \{1-t\}$ za vsak $t \in [0,1]$. Sedaj opazimo, da je:

$$\varprojlim(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{G}) = \{(t_1, t_2, t_3) \in I_1 \times I_2 \times I_3 \mid t_1 = t_2 = t_3 = \frac{1}{2}\}$$

Torej vidimo, da v inverznem sistemu $\varprojlim(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{G})$ ne obstaja ne velik in ne debel kontinuum, čeprav so vsi grafi vseh funkcij povezani in surjektivni.
Opazimo, da v zgornjem primeru $f_{1,3} \neq f_{1,2} \circ f_{2,3}$. Zato ta zgled služi kot motivacija za definiranje naslednje lastnosti τ, ki pove, da se takšne situacije ne smejo zgoditi. $(\Gamma(f_{u,v}) = \Gamma(f_{u,v_1} \circ \ldots \circ f_{v_n,v}))$.

Lema

Naj bo $\overrightarrow{G} = (V, \overrightarrow{E})$ *usmerjen graf in* $\overrightarrow{H} = (V, \overrightarrow{F})$ *poljuben povezan podgraf grafa* $\overrightarrow{G}$. *Naj bo* $(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{G})$ *inverzni sistem na usmerjenem grafu* $\overrightarrow{G}$ *z lastnostjo* τ *in naj bo* $\mathbf{f}' = \{f_{v,u} \mid (u, v) \in \overrightarrow{F}\}$. *Potem je* $\varprojlim(\mathbf{I}, \mathbf{f}', \overrightarrow{H}) = \varprojlim(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{G})$.

Izrek

Naj bo V števna množica, $\overrightarrow{G} = (V, \overrightarrow{E})$ povezan usmerjen graf in $(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{G})$ inverzni sistem na usmerjenem grafu $\overrightarrow{G}$ z lastnostjo τ tako, da je $\Gamma(f)$ povezan in surjektiven za vsak $f \in \mathbf{f}$. Potem obstaja velik kontinuum v $\varprojlim(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{G})$.

Veliki in debeli kontinuumi

Dokaz. Naj bo $\vec{F} \subseteq \vec{E}$ taka množica povezav, da je $\vec{T} = (V, \vec{F})$ drevo v grafu $\vec{G}$. Naj bo še $\mathbf{f}' = \{f_{v,u} \mid (u, v) \in \vec{F}\}$. Po eni izmed prejšnjih lem sledi, da obstaja debel kontinuum C v $\varprojlim(\mathbf{I}, \mathbf{f}', \vec{T})$.

Sledi, da je $\varprojlim(\mathbf{I}, \mathbf{f}', \vec{T}) = \varprojlim(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \vec{G})$, torej je $C \subseteq \varprojlim(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \vec{G})$.

Naj bo $u \in V$ poljuben in $v \in V$ takšen, da je $(u, v) \in \vec{F}$ ali $(v, u) \in \vec{F}$. Če je $(u, v) \in \vec{F}$, potem je,

$$\pi_u(C) = p_1(\pi_{(u,v)}(C)) = p_1(\Gamma(f_{v,u})) = I_u.$$

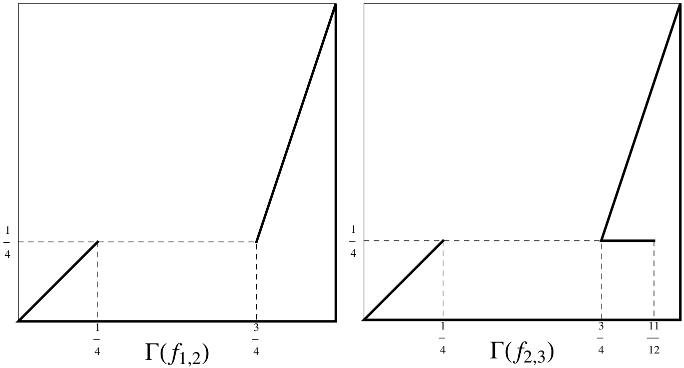
Če pa je $(v, u) \in \vec{F}$, potem je

$$\pi_u(C) = p_2(\pi_{(v,u)}(C)) = p_2(\Gamma(f_{u,v})) = I_u.$$

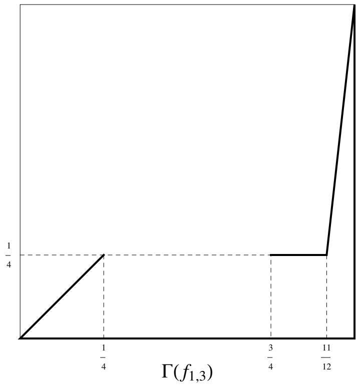
Sledi, da je $\pi_u(C) = I_u$ za vsak $u \in V$. Torej je C velik kontinuum v $\varprojlim(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \vec{G})$. $\square$

Zgled.

Naj bo $V = \{1, 2, 3\}$, $\overrightarrow{E} = \{(3, 2), (2, 1), (1, 3)\}$, $\overrightarrow{F} = \{(3, 2), (2, 1)\}$ in $\overrightarrow{G} = (V, \overrightarrow{E})$ ter $\overrightarrow{T} = (V, \overrightarrow{F})$. Za vsak $v \in V$ naj bo $I_v = [0, 1]$. Naj bosta še $\Gamma(f_{1,2})$ in $\Gamma(f_{2,3})$ funkciji z grafoma predstavljenima na Sliki (1) in $\Gamma(f_{1,3})$ funkcija z grafom na Sliki (2).



Veliki in debeli kontinuumi



Slika: Graf $\Gamma(f_{1,3})$

Veliki in debeli kontinuumi

Sledi, da je $f_{1,3} = f_{1,2} \circ f_{2,3}$, grafi vseh funkcij $\Gamma(f_{1,2})$, $\Gamma(f_{2,3})$, $\Gamma(f_{1,3})$ pa so povezani in surjektivni. Naj bo $\mathbf{f} = \{f_{1,2}, f_{2,3}, f_{1,3}\}$ in $\mathbf{g} = \{f_{1,2}, f_{2,3}\}$. Naj še bo

$$C_1 = \left\{(x, y, z) \in I_1 \times I_2 \times I_3 \mid x = y = \frac{1}{4}, z \in \left[\frac{3}{4}, \frac{11}{12}\right]\right\}$$

in

$$C_2 = \varprojlim(\mathbf{I}, \mathbf{g}, \overrightarrow{T}) \setminus C_1 .$$

Očitno je C_1 lok in da ni debel kontinuum v $\varprojlim(\mathbf{I}, \mathbf{g}, \overrightarrow{T})$. Zlahka tudi vidimo, da je C_2 debel kontinuum v $\varprojlim(\mathbf{I}, \mathbf{g}, \overrightarrow{T})$. Očtno je $C_2 \subseteq \varprojlim(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{G})$. Ker pa je $\left(\frac{3}{4}, \frac{1}{4}\right) \in \Gamma(f_{1,3})$ in $\left(\frac{1}{4}, y, \frac{3}{4}\right) \notin C_2$ za vsak $y \in I_2$, sledi, da C_2 ni debel kontinuum v $\varprojlim(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{G})$.

Torej v $\varprojlim(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{G})$ ne obstaja debel kontinuum, čeprav so grafi vseh funkcij povezani in surjektivni, inverzni sistem $(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{G})$ pa ima lastnost τ.
Opazimo tudi, da funkcija $f_{1,3}$ ni šibko c-ireducibilna. To je tudi motivacija za definicijo lastnosti σ.

Definicija

Naj bo $\overrightarrow{G} = (V, \overrightarrow{E})$ *usmerjen graf in* $(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{G})$ *inverzni sistem na usmerjenem grafu* $\overrightarrow{G}$. *Pravimo, da ima inverzni sistem* $(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{G})$ *lastnost* σ, *če obstaja drevo* $\overrightarrow{T} = (V, \overrightarrow{F})$, $\overrightarrow{F} \subseteq \overrightarrow{E}$, *da za vsako povezavo* $(u, v) \in \overrightarrow{E}$ *velja*

$$(u, v) \notin \overrightarrow{F} \quad \Longrightarrow \quad f_{v,u} \text{ je šibko c-iredukcibilna.}$$

Lema

Naj bo V končna množica in $\overrightarrow{G} = (V, \overrightarrow{E})$ povezan usmerjen graf. Naj bo še $(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{G})$ inverzni sistem na usmerjenem grafu $\overrightarrow{G}$ z lastnostjo τ in σ tako, da je $\Gamma(f)$ povezan in surjektiven za vsak $f \in \mathbf{f}$. Potem obstaja debel kontinuum v $\varprojlim(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{G})$.

Veliki in debeli kontinuumi

Dokaz:
Naj bo $\vec{F} \subseteq \vec{E}$ in $\vec{T} = (V, \vec{F})$ takšno drevo, da za vsako povezavo $(u, v) \in \vec{E}$ velja

$$(u, v) \notin \vec{F} \quad \Longrightarrow \quad f_{v,u} \text{ je šibko c-ireducibilna.}$$

Takšno drevo obstaja, saj ima $(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \vec{G})$ lastnost σ. Torej obstaja debel kontinuum C v $\varprojlim(\mathbf{I}, \mathbf{f}', \vec{T})$, kjer je $\mathbf{f}' = \{f_{v,u} \in \mathbf{f} \mid (u, v) \in \vec{F}\}$.

Vzamimo ta debel kontinuum C. Sledi $\varprojlim(\mathbf{I}, \mathbf{f}', \vec{T}) = \varprojlim(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \vec{G})$, torej je $C \subseteq \varprojlim(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \vec{G})$. Pokazali bomo, da je C debel kontinuum v $\varprojlim(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \vec{G})$.

Naj bo $(u, v) \in \vec{E}$. Če je $(u, v) \in \vec{F}$, potem je $\pi_{(u,v)}(C) = \Gamma(f_{v,u})$, ker je C debel kontinuum v $\varprojlim(\mathbf{I}, \mathbf{f}', \vec{T})$.

Predpostavimo, da je $(u,v) \in \overrightarrow{E} \setminus \overrightarrow{F}$. Naj bo $\overrightarrow{C} = (V', \overrightarrow{E}')$ cikel v $\overrightarrow{G}$, da velja:

1. $(u,v) \in \overrightarrow{E}'$,
2. za vsak $\overrightarrow{e} \in \overrightarrow{E}'$ velja
$$\overrightarrow{e} \neq (u,v) \quad \Longrightarrow \quad \overrightarrow{e} \in \overrightarrow{F}.$$
Naj bo $V' = \{w_1, w_2, w_3, \ldots, w_{n-1}, w_n\}$, $w_1 = u$, $w_n = v$ in naj bo
$$\{\{w_1, w_2\}, \{w_2, w_3\}, \{w_3, w_4\}, \ldots, \{w_{n-1}, w_n\}, \{w_n, w_1\}\}$$
množica vseh povezav $\psi(\overrightarrow{C})$, da je
$$\Gamma(g_{w_n,w_{n-1}} \circ g_{w_{n-1},w_{n-2}} \circ \ldots \circ g_{w_4,w_3} \circ g_{w_3,w_2} \circ g_{w_2,w_1}) = \Gamma(f_{w_n,w_1}),$$
kjer je $g_{w_{i+1},w_i} = f_{w_{i+1},w_i}$, če je $(w_i, w_{i+1}) \in \overrightarrow{E}'$ ali $g_{w_{i+1},w_i} = f_{w_i,w_{i+1}}$ če je $(w_{i+1}, w_i) \in \overrightarrow{E}'$ za vsak $i \in \{1, 2, 3, \ldots, n-1\}$.

Naj bo $K = \pi_{(u,v)}(C)$. Potem je K tak podkontinuum v $\Gamma(f_{v,u})$, da velja $p_1(K) = I_u$ in $p_1(K) = I_v$. Ker je $f_{v,u}$ šibko c-ireducibilna, sledi $K = \Gamma(f_{v,u})$.

Izrek

Naj bo V števna množica, $|V| > 1$, naj bo $\overrightarrow{G} = (V, \overrightarrow{E})$ povezan usmerjen graf in naj bo $(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{G})$ inverzni sistem na usmerjenem grafu $\overrightarrow{G}$ z lastnostjo τ in σ tako, da je $\Gamma(f)$ povezan in surjektiven za vsak $f \in \mathbf{f}$. Potem obstaja debel kontinuum v $\varprojlim(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{G})$.

Veliki in debeli kontinuumi

Samo ideja dokaza.

Za vsako število $n \in \mathbb{N}$ naj bo $\overrightarrow{T}_n = (V_n, \overrightarrow{F}_n)$ takšno drevo, da velja:

1. V_n je končna za vsak $n \in \mathbb{N}$,
2. $\overrightarrow{T}_n$ je podgraf grafa $\overrightarrow{T}_{n+1}$ za vsak $n \in \mathbb{N}$,
3. $V = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$ in $\overrightarrow{F} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overrightarrow{F}_n$.

Za vsako število $n \in \mathbb{N}$ naj bo $\overrightarrow{G}_n = (V_n, \overrightarrow{E}_n)$ podgraf grafa $\overrightarrow{G}$, da velja

1. $\overrightarrow{F}_n \subseteq \overrightarrow{E}_n$ za vsak $n \in \mathbb{N}$,
2. za vsako povezavo $(u, v) \in \overrightarrow{E}_n \setminus \overrightarrow{F}_n$ je $f_{v,u}$ šibko c-ireducibilna za vsak $n \in \mathbb{N}$,
3. $\overrightarrow{G}_n$ je podgraf grafa $\overrightarrow{G}_{n+1}$ za vsak $n \in \mathbb{N}$,
4. $V = \bigcup_{n=1}^{\infty} V_n$ in $\overrightarrow{E} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overrightarrow{E}_n$.

Očitno je, da ima inverzni sistem $(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{G}_n)$ lastnost σ. Obstaja debel kontinuum C_n v $\underset{\longleftarrow}{\lim}(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{G}_n)$. Fiksirajmo ta C_n za vsak $n \in \mathbb{N}$. Naj bo $K_n = C_n \times \prod_{v \in V \setminus V_n} I_v$ za vsako število $n \in \mathbb{N}$. Potem je vsak K_n kontinuum v $\prod_{v \in V} I_v$. Brez izgube za splošnost lahko predpostavimo, da zaporedje (K_n) konvergira v $2^{\prod_{v \in V} I_v}$. Naj bo

$$C = \lim_{n \to \infty} K_n \quad \text{v} \quad 2^{\prod_{v \in V} I_v}.$$

C je res kontinuum v $\underset{\longleftarrow}{\lim}(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{G})$ ter velja

$$\pi_{(u,v)}(C) = \pi_{(u,v)}(\lim_{n \to \infty} K_n) = \lim_{n \to \infty} \pi_{(u,v)}(K_n) = \Gamma(f_{v,u}).$$

torej je C debel kontinuum.

Izrek

Naj bo V števna množica, $\overrightarrow{G} = (V, \overrightarrow{E})$ usmerjen graf, kjer je $\overrightarrow{E} \neq \emptyset$ in naj bo $(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{G})$ inverzni sistem nad grafom $\overrightarrow{G}$, ki ima lastnosti τ in σ ter $\Gamma(f)$ je povezan in surjektiven za vsak $f \in \mathbf{f}$. Potem sta naslednji trditvi ekvivalentni.

(1) *Vsak debel kontinuum v $\underset{\longleftarrow\!\circ}{\lim}(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{G})$ je tudi velik kontinuum v $\underset{\circ\!\longrightarrow}{\lim}(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{G})$.*

(2) *Za vsako vozlišče $u \in V$ je $N(u) \neq \emptyset$.*

Zgled. Naj bo $V = \{1, 2, 3\}$, $\overrightarrow{E} = \{(2, 1)\}$ in $\overrightarrow{G} = (V, \overrightarrow{E})$ usmerjen graf. Za vsak $n \in V$ naj bo $I_n = [0, 1]$ in $f_{1,2} : I_2 \multimap I_1$ poljubna navzgor polzvezna funkcija tako, da je $\Gamma(f_{1,2})$ povezan in surjektiven. Potem je

$$C = \{(s, t, 0) \in I_1 \times I_2 \times I_3 \mid t \in [0, 1], (t, s) \in \Gamma(f_{1,2})\}$$

debel kontinuum v $\varprojlim(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{G})$, vendar ni velik kontinuum v $\varprojlim(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{G})$, saj je $\pi_3(x, y, z) = 0$ za vsak $(x, y, z) \in C$.

Zveza med velikimi in debelimi kontinuumi

Izrek

Naj bo V števna množica, $\overrightarrow{G} = (V, \overrightarrow{E})$ usmerjen graf, da velja $\overrightarrow{E} \neq \emptyset$ in naj bo $(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{G})$ inverzni sistem na usmerjenem grafu $\overrightarrow{G}$ z lastostjo τ tak, da je $\Gamma(f)$ povezan in surjektiven za vsak $f \in \mathbf{f}$. Naslednji dve trditvi sta ekvivalentni.

1. *Vsak velik kontinuum v* $\underset{\circ\!\!\longleftarrow}{\lim}(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{G})$ *je tudi debel kontinuum v* $\underset{\circ\!\!\longleftarrow}{\lim}(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{G})$.
2. *Za vsak $f \in \mathbf{f}$ je f šibko c-ireducibilna.*

Zveza med velikimi in debelimi kontinuumi

Zgled. Naj bo $V = \{1, 2\}$, $\overrightarrow{E} = \{(2, 1)\}$ in $\overrightarrow{G} = (V, \overrightarrow{E})$. Naj bo še $I_1 = I_2 = [0, 1]$ in $f_{1,2}(t) = \{t, 1 - t\}$ za vsak $t \in I_2$. Potem je $C = \{(t, t) \mid t \in [0, 1]\}$ velik kontinuum v $\underset{\circ\!\!-\!\!-}{\lim}(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{G})$, vednar ni debel kontinuum v $\underset{\circ\!\!-\!\!-}{\lim}(\mathbf{I}, \mathbf{f}, \overrightarrow{G})$.

Zveza med velikimi in debelimi kontinuumi

Še nekaj odprtih problemov.

- Ali je posplošena inverzna limita vsakega inverznega sistema na usmerjenem grafu neprazen kompakten prostor?
- Karakteriziraj (poišči zadostne pogoje), da bo posplošena inverzna limita inverznega sistema na usmerjenem grafu povezana.
- Ali lahko vsak kontinuum predstavimo kot posplošeno inverzno limito inverznega sistema na usmerjenem grafu?
- Ali lahko vsak kontinuum predstavimo kot posplošeno inverzno limito inverznega sistema na usmerjenem grafu z eno vezno funkcijo?

Literatura:

- I. Banič, M. Črepnjak, P. Goričan, T. Kac, M. Merhar, U. Milutinović, *Big and large continua in inverse limits of inverse systems over directed graphs*, Topology Appl. (2020).
- I. Banič, M. Črepnjak, M. Merhar, U. Milutinović, *The (weak) full projection property for inverse limits with upper semicontinuous bonding functions*, Mediterr. J. Math. (2018).
- I. Banič, M. Črepnjak, M. Merhar, U. Milutinović, T. Sovič, *The Closed Subset Theorem for Inverse Limits with Upper Semicontinuous Bonding Functions*, Bull. Malays. Math. Sci. Soc. (2019).
- I. Banič, J. Kenndy, *Inverse limits with bonding functions whose graphs are arcs*, Topology Appl. (2015).
- M. Črepnjak , *Klasifikacija inverznih limit s poševnimi šotorskimi veznimi funkcijami*, doktorska disertacija, (2013).

Literatura:

- J. P. Huneke, *Mountain climbing*, Trans. Am. Math. Soc. (1969).
- W.T. Ingram, W.S. Mahavier, *Inverse limits of upper semi-continuous set valued functions*, Houston J. Math 2006.
- J.R. Munkres, *Topology of first course*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, (1975).
- S. B. Nadler, *Continuum theory. An introduction*, Marcel Dekker, Inc., New York, (1992).