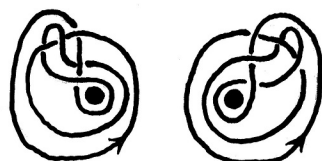


# BARVANJE VOZLOV IN SPLETOV S KLAPAMI

JOŽE MALEŠIČ

Ali sta naslednja vozla v polnem torusu ambientno izotopna?



To sta vozla  $5_{26}$  in  $5_{27}$  iz tabele vozlov v članku Boštjana Gabrovška: *Tabulation of Prime Knots in Lens Spaces*. Premenjalni moduli teh dveh vozlov ne razlikujejo - potrebna so druga orodja.

Klapa (angl. quandle) je množica  $Q$  z dvočleno operacijo  $*$ , za katero velja,

- da je  $a * a = a$  za vsak  $a \in Q$  (idempotentnost operacije  $*$ ),
- da je  $(a * b) * c = (a * c) * (b * c)$  za poljubne  $a, b, c \in Q$  (distributivnost) in
- da je preslikava  $T_b : Q \rightarrow Q$ , ki je dana s predpisom  $x \mapsto x * b$ , bijekcija pri vsakem  $b \in Q$ .

Inverzno operacijo  $\bar{*}$  definiramo s predpisom:  $a \bar{*} b = T_b^{-1}(a)$ . Torej je  $(a * b) \bar{*} b = a$ .

**PRIMER 1.** Kolobar celih števil  $\mathbb{Z}$  z operacijo  $a * b = 2b - a$ . Inverzna operacija  $\bar{*}$  sovpada z operacijo  $*$ .

**PRIMER 2.** Kolobar  $\mathbb{Z}_n$  celih števil po modulu  $n$ , tudi z operacijo  $a * b = 2b - a$ . Inverzna operacija  $\bar{*}$  sovpada z operacijo  $*$ .

Zgornji dve klapi spadata med diedrske klape.

**PRIMER 3.** Kolobar  $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$  Laurentovih polinomov s celimi koeficienti,

$$a(t) * b(t) = t \cdot a(t) + (1 - t) \cdot b(t).$$

Inverzna operacija je dana s predpisom

$$a \bar{*} b = \frac{1}{t} \cdot a(t) + (1 - \frac{1}{t}) \cdot b(t)$$

**PRIMER 4.** Naj bo  $h(t)$  nerazcepen polinom s celimi koeficienti in vodilnim koeficientom 1, tako da je faktorski kolobar  $\mathbb{Z}[t]/(h(t))$  obseg. Ta obseg je klapa za operacijo

$$a(t) * b(t) = t \cdot a(t) + (1 - t) \cdot b(t) \pmod{h(t)}$$

Inverzna operacija je dana s predpisom

$$a \bar{*} b = t^{-1} \cdot a(t) + (1 - t^{-1}) \cdot b(t)$$

**PRIMER 5.** Naj bo  $h(t)$  tak nerazcepen polinom s koeficienti iz  $\mathbb{Z}_n$  in vodilnim koeficientom 1, da je faktorski kolobar  $\mathbb{Z}_n[t]/(h(t))$  obseg. Ta obseg je klapa za operacijo

$$a(t) * b(t) = t \cdot a(t) + (1 - t) \cdot b(t) \pmod{h(t)}$$

Inverzna operacija je dana s predpisom

$$a \bar{*} b = t^{-1} \cdot a(t) + (1 - t^{-1}) \cdot b(t)$$

Zadnje tri klape spadajo med Alexandrove klape.

Preslikava  $f : Q_1 \rightarrow Q_2$  dveh klap je homomorfizem, če velja

$$f(a *_1 b) = f(a) *_2 f(b) \text{ za poljubna } a, b \in Q_1.$$

**PRIMER 6.** Naj bo preslikava  $f : Q_1 \rightarrow Q_2$  konstantna. To pomeni, da je

$f(x) = a$  za vse  $x \in Q_1$  pri poljubnem konstantnem  $a \in Q_2$ . Zaradi idempotentnosti operacije  $*$  je vsaka konstantna preslikava homomorfizem.

**PRIMER 7.** Faktorska preslikava  $\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_n$  je nekonstanten homomorfizem.

**PRIMER 8.** Faktorska preslikava

$\mathbb{Z}[t^{\pm 1}] \rightarrow \mathbb{Z}[t]/(h(t))$ , ki polinom  $\frac{1}{t}$  preslika v element  $t^{-1}$ , je nekonstanten homomorfizem.

**PRIMER 9.** Faktorska preslikava

$\mathbb{Z}[t]/(h(t)) \rightarrow \mathbb{Z}_n[t]/(h(t))$  je nekonstanten homomorfizem.

Problem: ali sta dani dve klapi  $Q_1$  in  $Q_2$  izomorfni?

Ta problem se da reševati tudi s pomočjo reprezentacij klap.

Reprezentacija klape  $Q$  v klapi  $P$  je homomorfizem  $Q \rightarrow P$ .

**TRDITEV.** Izomorfizem klap  $Q_1 \rightarrow Q_2$  inducira bijekcijo  $\text{Hom}(Q_2, P) \rightarrow \text{Hom}(Q_1, P)$  med množicama reprezentacij.

Dokaz:

$$\begin{array}{ccc} Q_2 & \rightarrow & P \\ \cong \uparrow & & \nearrow \\ Q_1 & & \end{array}$$

**PRIMER 10.** Klapi  $\mathbb{Z}$  in  $\mathbb{Z}[t]/(t^2 + t + 1)$  sta števno neskončni. Ali sta morda tudi izomorfni?

Preučimo reprezentacije klap  $\mathbb{Z}$  in  $\mathbb{Z}[t]/(t^2 + t + 1)$  v klapi  $\mathbb{Z}_2[t]/(t^2 + t + 1)$ . Ta ima štiri elemente:  $\{0, 1, t, 1 + t\}$  in je obseg, saj je  $t(1 + t) \equiv 1$ .

Iz 9. primera vemo, da ima klapa  $\mathbb{Z}[t]/(t^2 + t + 1)$  tudi nekonstantne reprezentacije, seveda pa še štiri štiri konstantne.

Poiščimo še vse možne reprezentacije klape  $\mathbb{Z}$ .

Naj bo  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}_2[t]/(t^2 + t + 1)$  reprezentacija. Za poljubni celi števili  $x$  in  $y$  mora veljati:

$$f(2y - x) = tf(x) + (1 + t)f(y) \in \mathbb{Z}_2[t]/(t^2 + t + 1)$$

Pri  $x = 0$  in  $y = 1$  dobimo enačbo

$$f(2) = tf(0) + (1 + t)f(1), \tag{1}$$

pri  $x = 2$  in  $y = 1$  pa enačbo

$$f(0) = tf(2) + (1 + t)f(1) \tag{2}$$

Ko enačbi seštejemo po modulu 2, dobimo  $f(0) + f(2) = 0$ , torej  $f(2) = f(0)$ .

Iz enačb tudi sledi, da je  $f(1) = f(0)$ .

Pri  $x = 1$  in  $y = 2, 3, 4, \dots$  dobimo

$$f(3) = f(5) = f(7) = \dots = f(0).$$

pri  $x = 2$  in  $y = 2, 3, 4, \dots$  pa dobimo

$$f(4) = f(6) = f(8) = \dots = f(0).$$

Podobno se da videti, da je  $f(n) = f(0)$  tudi za vsa negativna cela števila  $n$ .

Klapa  $\mathbb{Z}$  ima samo štiri konstantne reprezentacije, torej klapi  $\mathbb{Z}$  in  $\mathbb{Z}[t]/(t^2 + t + 1)$  ne moreta biti izomorfni.

Vsako avgmentirano delovanje neke grupe  $G$  na množici  $Q$  inducira strukturo klape na  $Q$ .

Desno delovanje grupe  $G$  na množici  $Q$  je taka dvočlena operacija

$$Q \times G \rightarrow Q, (x, g) \mapsto x^g, x \in Q, g \in G,$$

da za poljubna  $g, h \in G$  velja:  $(x^g)^h = x^{gh}$ .

Avgmentacija danega delovanja grupe  $G$  na množici  $Q$  je taka preslikava  $\varepsilon : Q \rightarrow G$ , da sta izpolnjena pogoja

- $x^{\varepsilon(x)} = x$  za vsak  $x \in Q$  in
- $\varepsilon(x^g) = g^{-1}\varepsilon(x)g$  za vsak  $g \in G$ .

Operacijo  $*$  definiramo s pomočjo avgmentacije:

$$x * y = x^{\varepsilon(y)} \text{ za } x, y \in Q.$$

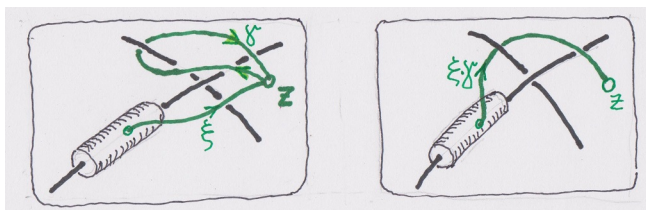
Naj bo  $K$  vozal ali splet v  $S^3$ ,  $N$  pa njegova regularna okolica. Grupa vozla ali spleta  $K$  je fundamentalna grupa komplementa njegove okolice,  $\pi_1(S^3 - N)$ .

Klapa orientiranega vozla ali spleta  $K$  je množica  $Q$  homotopskih razredov poti v množici  $S^3 - N$ , ki imajo začetek na robu  $N$ , konec pa v neki fiksni bazni točki  $z \in S^3 - N$ . Pri homotopiji lahko začetek poti drsi po robu okolice  $N$ .

Grupa vozla ali spleta deluje na množici  $Q$  s konkatencijo poti  $\xi$  in pentlje  $\gamma$ :

$$[\xi]^{[\gamma]} = [\xi \cdot \gamma]$$

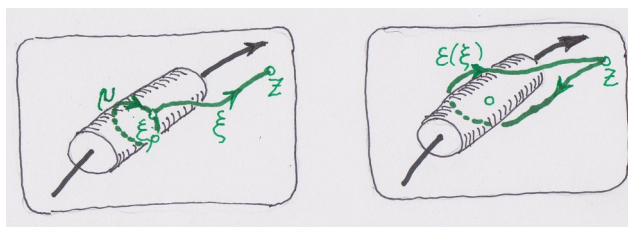
Delovanje grupe vozla na množici  $Q$ :



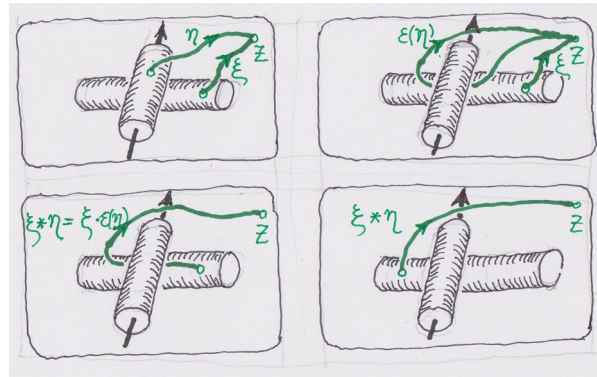
Naj bo  $\xi_0 \in \partial(N)$  začetek poti  $\xi$  in naj bo  $\mu \subset \partial(N)$  pentlja z bazno točko  $\xi_0$  vzdolž pozitivno orientirane meridijske krožnice.

Avgmentacija  $\varepsilon : Q \rightarrow \pi_1(S^3 - N)$  je dana s predpisom:

$$\varepsilon : [\xi] \mapsto [\xi^{-1} \cdot \mu \cdot \xi]$$



V vsakem križišču se srečajo tri veje diagrama, desni podvoz, nadvoz in levi podvoz. Naj bo  $\xi$  pot z začetkom na okolici desnega podvoza in  $\eta$  pot z začetkom na okolici nadvoza. Katera pot potem predstavlja element  $[\xi] * [\eta]$  v klapi  $Q$  vozla  $K$  ?



Iz slike se vidi pravilo:

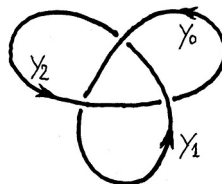
$$\text{desni podvoz} * \text{nadvoz} = \text{levi podvoz}.$$

**IZREK** (O prezentaciji klape vozla ali spleta). *Generatorji klape vozla ali spleta so veje diagrama. Vsako križišče da relacijo  $x * y = z$ , kjer je  $x$  desni podvoz,  $y$  nadvoz in  $z$  levi podvoz.*

Treba je pripomniti, da je izrek formuliran nepopolno, čeprav je njegova vsebina intuitivno jasna. Za korektno definicijo prezentacije klape bi bilo treba najprej vpeljati tehnične pojme, kot so *prosta klapa*, najmanjša ekvivalentna relacija, ki vsebuje relacije, *faktorska klapa*.

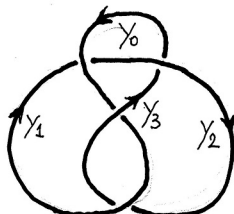
**PRIMER 11.** *Prezentacija klape deteljice:*

$$\langle y_0, y_1, y_2 | y_1 * y_0 = y_2, y_0 * y_1 = y_2, y_0 * y_2 = y_1 \rangle$$



**PRIMER 12.** *Prezentacija klape osmice:*

$$\langle y_0, y_1, y_2, y_3 | y_1 * y_0 = y_2, y_3 * y_1 = y_2, \\ y_3 * y_2 = y_0, y_1 * y_3 = y_0 \rangle$$



**IZREK** (D.Joyce 1982 in S.V.Matveev 1984). *Ambientno izotopna orientirana vozla ali spleta imata izomorfni klapi.*

Če bi radi dokazali, da vozla  $K_1$  in  $K_2$  nista ambientno izotopna, moramo dokazati, da njuni klapi  $Q_1$  in  $Q_2$  nista izomorfni. To lahko spet dosežemo s preučevanjem reprezentacij obeh klap v skupni tretji klapi  $P$ .

Naj bo  $Q$  klapa orientiranega vozla ali spleta,  $P$  pa neka znana klapa. Preslikavi, ki vsaki veji diagrama priredi nek element klape  $P$  na tak način, da so v vsakem križišču izpolnjene relacije, pravimo *barvanje vej*. Klapi  $P$  pravimo *paleta barvanja*. Vsaka reprezentacija klape  $Q$  seveda enolično določa barvanje vej. Velja tudi obratno:

**TRDITEV.** *Vsako barvanje vej enolično določa neko reprezentacijo klape vozla ali spleta v paleti.*

Za dokaz trditve bi bilo treba spet upoštevati definicijo prezentacije klape, torej tudi pojme prosta klapa, najmanjša ekvivalenčna relacija in factorska klapa.

**PRIMER 13.** *Ali sta deteljica in osmica ambientno izotopna vozla?*

Prvi korak: iščemo primerno paletu  $P$  - tako, da bo imela klapa deteljice tudi nekonstantne reprezentacije. Preskusimo, ali bi lahko vzeli za paletu klapo  $\mathbb{Z}$ .

Neznane barve vej  $y_0, y_1$  in  $y_2$  označimo enako, z  $y_0, y_1$  in  $y_2$ . Za celoštevilske neznanke  $y_0, y_1$  in  $y_2$  dobimo naslednji sistem linearnih enačb s celoštevilskimi neznančkami

$$\begin{aligned} 2y_2 - y_0 &= y_1 \\ 2y_1 - y_2 &= y_0 \\ 2y_0 - y_1 &= y_2 \end{aligned}$$

Ekvivalenten sistem enačb:

$$\begin{aligned} y_2 &= 2y_0 - y_1 \\ 3(y_1 - y_0) &= 0 \end{aligned}$$

Ta sistem ima samo trivialne rešitve  $y_2 = y_1 = y_0$ , torej paleta  $\mathbb{Z}$  omogoča samo konstantna barvanja.

Nekonstantna barvanja dobimo s paletto  $\mathbb{Z}_3$ , saj tako odpade enačba  $3(y_1 - y_0) = 0$  in ostane samo prva  $y_2 = 2y_0 - y_1 \equiv 2y_0 + 2y_1$ .

Ker lahko vrednosti za  $y_0$  in  $y_1$  poljubno izbiramo iz množice  $\mathbb{Z}_3 = \{0, 1, 2\}$ , imamo  $3 \cdot 3 = 9$  različnih barvanj, od teh so tri konstantna.

Poiščimo še vsa možna barvanja vej s paletto  $\mathbb{Z}_3$  v diagramu osmice. Neznane barve vej  $y_0, y_1, y_2$  in  $y_3$  označimo enako, z  $y_0, y_1, y_2$  in  $y_3$ . Za celoštevilске neznanke  $y_0, y_1, y_2$  in  $y_3$  dobimo naslednji sistem enačb:

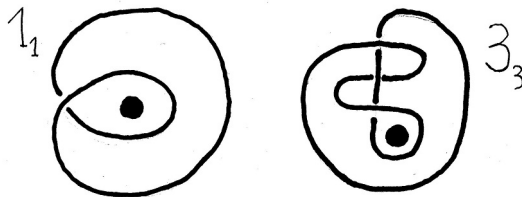
$$\begin{aligned} 2y_1 + 2y_0 &= y_2 \\ 2y_3 + 2y_1 &= y_2 \\ 2y_3 + 2y_2 &= y_0 \\ 2y_1 + 2y_3 &= y_0 \end{aligned}$$

Ta sistem ima rešitve  $y_1 = y_2 = y_3 = y_0$  pri poljubnem  $y_0 \in \mathbb{Z}_3$ , torej samo tri konstantna barvanja.

Vozla deteljica in osmica nista ambientno izotopna, saj med množicama barvanj ne more biti bijekcije.

Kot kaže naslednji primer, včasih ravnokar opisana metoda odpove.

**PRIMER 14.** *Ali sta vozla  $1_1$  in  $3_3$  v polnem torusu ambientno izotopna?*

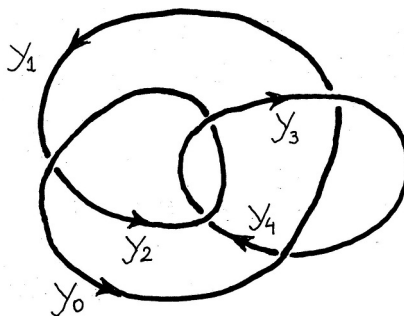


Vozlu v polnem torusu priredimo dvokomponentni splet v  $S^3$  tako, da je prva komponenta vozla, druga komponenta pa je meridijska krožnica torusa. Vozloma  $1_1$  in  $3_3$  tako pripadata naslednja spleta. Dovolj je dokazati, da tadva orientirana spleta nista ambientno izotopna.



Najprej si oglejmo splet, ki pripada vozlu  $1_1$ . Iz slike preberemo relacije:

$$\begin{aligned} y_1 * y_0 &= y_2 & y_2 * y_3 &= y_0 \\ y_0 * y_3 &= y_1 & y_4 * y_2 &= y_3 \\ y_3 * y_0 &= y_4 \end{aligned}$$



Tako, kot v 13. primeru, najprej poskusimo, ali pri paleti  $\mathbb{Z}$  obstajajo nekonstantna barvanja. Za celoštevilске neznanke  $y_0, y_1, y_2, y_3, y_4$  dobimo naslednji sistem enačb:

$$\begin{aligned} 2y_0 - y_1 &= y_2 \\ 2y_3 - y_2 &= y_0 \\ 2y_3 - y_0 &= y_1 \\ 2y_2 - y_4 &= y_3 \\ 2y_0 - y_3 &= y_4 \end{aligned}$$

Neznanke  $y_1, y_2$  in  $y_4$  se dajo izraziti z neznankama  $y_0$  in  $y_3$ :

$$y_1 = 2y_3 - y_0, y_2 = 3y_0 - 2y_3, y_4 = 2y_0 - y_3,$$

za neznanki  $y_0$  in  $y_3$  pa sledi relacija

$$4(y_3 - y_0) = 0.$$

Torej je  $y_3 = y_0$ . Odtod hitro sledi, da je tudi  $y_1 = y_2 = y_4 = y_0$ . Vidimo, da pri paleti  $\mathbb{Z}$  dobimo samo konstantna barvanja. Za paletu vzemimo  $\mathbb{Z}_4$ ; odpade relacija

$$4(y_3 - y_0) = 0$$

in dobimo dvoparametrično družino rešitev:

$$y_1 = 3y_0 + 2y_3, y_2 = 3y_0 + 2y_3, y_4 = 2y_0 + 3y_3.$$

Vseh barvanj je torej  $4 \cdot 4 = 16$ , od tega so 4 konstantna.

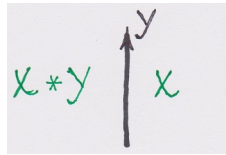
Na enak način dobimo za drugi splet pri paleti  $\mathbb{Z}_4$  tudi dvoparametrično družino rešitev

$$\begin{aligned} y_0 = 3y_4 + 2y_5, y_3 = y_4, y_1 = 3y_4 + 2y_5, \\ y_2 = y_4, y_6 = 2y_4 + 3y_5. \end{aligned}$$

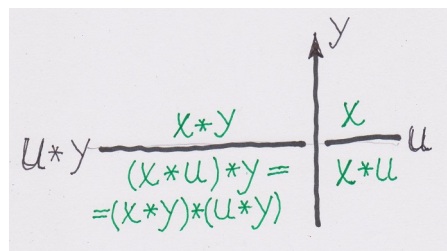
Vseh barvanj je torej  $4 \cdot 4 = 16$ . Oba spleta imata enako število barvanj. To ne nasprotuje dejstvu, da bi obstajala bijekcija med množicama barvanj obeh spleto. Ni nam uspelo dokazati, da vozla nista ambientno izotopna.



Metoda z barvanjem vej diagrama se da izboljšati tako, da barvamo tudi lica diagrama, in sicer po naslednjem pravilu:



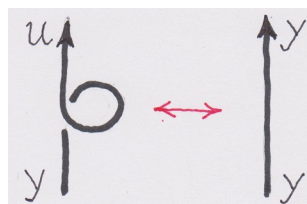
Da je tako barvanje dobro definirano, kaže naslednja slika:



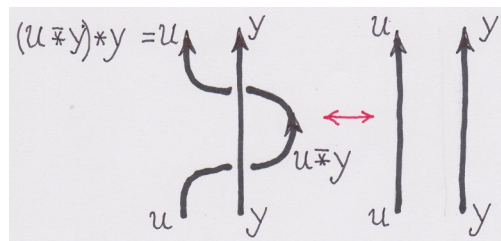
Zaradi distributivnosti klapne operacije  $*$  dobimo enako barvo, ko krožimo okoli križišča – v smeri urnega kazalca ali v nasprotni smeri.

**TRDITEV.** *Množica barvanj vej in lic pred Reidemeistrovim premikom je v bijekciji z množico barvanj po njem.*

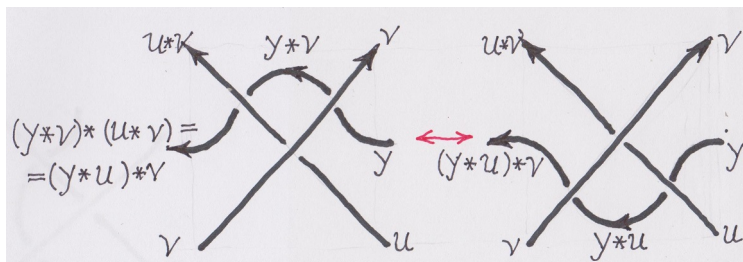
Treba je dokazati, da vsako barvanje vej in lic pred Reidemeistrovim premikom enolično določa barvanje po premiku. Iz slike se vidi, da je pri prvem Reidemeistrovem premiku  $u = y * y = y$ :



Iz slike se vidi, da je pri drugem premiku  $(u * y) * y = u$ .

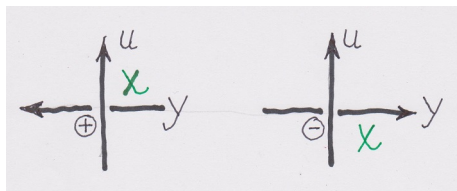


Na sliki so napisane barve vej in lic pred tretjim Reidemeistrovem premikom in po njem:



Naj bo  $P$  paleta nekega barvanja vej in lic,  $A$  neka Abelova grupa in  $z = \pm 1$  znak križišča. Vsakemu križišču določimo Boltzmannovo utež  $\psi(x, y, u, z) \in A$  pri danem barvanju po naslednjem pravilu:  $y \in P$  je barva desnega podvoza,  $u \in P$  barva nadvoza in  $x \in P$  barva enega od dveh lic na desni strani, in sicer

- lica iz prvega kvadranta pri pozitivnem križišču ter
- lica iz četrtega kvadranta pri negativnem, pri čemer je nadvoz mišljen kot ordinatna os (ime Boltzmannova utež izvira iz statistične mehanike – pri ravninskem modelu medsebojnega vplivanja med molekulami plina se utež računa po enakem pravilu).



Teža danega barvanja je vsota Boltzmannovih uteži po vseh križiščih diagrama (zato morajo biti Boltzmannove uteži elementi neke Abelove grupe).

**TRDITEV.** Naj bo  $P$  paleta za dano barvanje vej in lic. Naj bo  $\psi(x, y, u, z) = z \cdot \varphi(x, y, u)$ , pri čemer funkcija  $\varphi$  ustreza pogojema

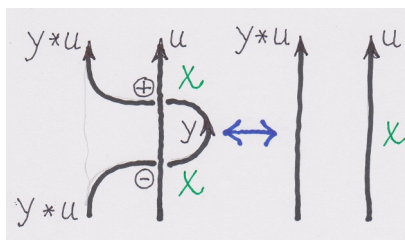
- $\varphi(x, y, y) = 0$  za  $x, y \in P$  in
- $\varphi(x, y, v) + \varphi(x * y, u, v) + \varphi(x * v, y * v, u * v) = \varphi(x, u, v) + \varphi(x, y, u) + \varphi(x * u, y * u, v)$  za  $x, y, u, v \in P$ .

Potem se Boltzmannova utež  $\psi(x, y, u, z)$  ne spremeni pri nobenem Reidemeistrovem premiku diagrama.

**POSLEDICA.** Preslikava frekvenca:  $A \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$ , ki vsaki barvi  $a \in A$  priredi moč množice vseh barvanj s težo  $a$ , je invarianta orientiranih vozlov in spletov.

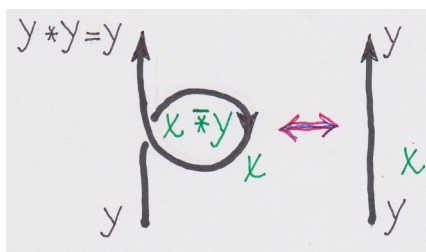
Dokaz trditve:

Ker je  $\psi(x, y, u, z) = z \cdot \varphi(x, y, u)$ , je vsota Boltzmannovih uteži v križiščih na levi strani slike enaka  $(+1) \cdot \varphi(x, y, u) + (-1) \cdot \varphi(x, y, u) = 0$ .



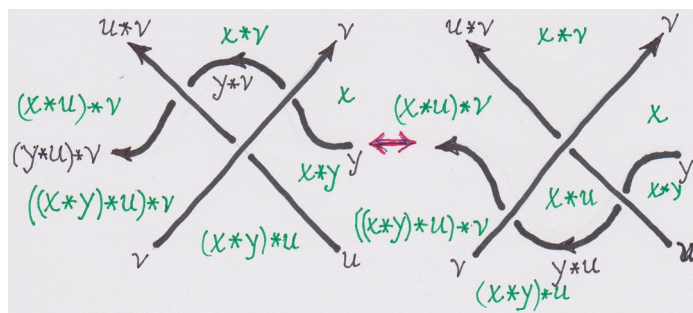
Dokazali smo, da se Boltzmannova utež ne spremeni pri 2.Reidemeistrovem premiku.

Ker je  $\varphi(x, y, y) = 0$ , je Boltzmannova utež edinega križišča na sliki enaka 0.



Dokazali smo, da se Boltzmannova utež ne spremeni pri 1.Reidemeistrovem premiku.

Na sliki so vsa križišča pozitivna. Vsota Boltzmannovih uteži na levi strani je enaka



$$\varphi(x, y, v) + \varphi(x * y, u, v) + \varphi(x * v, y * v, u * v),$$

na desni strani pa

$$\varphi(x, u, v) + \varphi(x, y, u) + \varphi(x * u, y * u, v).$$

Podobno se vidi tudi pri vseh drugih variacijah znakov križišč. Dokazali smo, da se Boltzmannova utež ne spremeni pri 3.Reidemeistrovem premiku.

Nekaj primerov za funkcijo  $\varphi$  pri različnih paletah in različnih grupah:

**PRIMER 15.** Za paletu  $P = \mathbb{Z}_3$  in grupo  $A = \mathbb{Z}$  se z reševanjem sistema linearnih enačb v kolobarju  $\mathbb{Z}$  vidi, da je edina rešitev zaporedje funkcij  $\varphi_n(x, y, u)$ , ki imajo pri  $x = 0, 1, 2$  vrednosti podane v tabeli:

$y \setminus u$	0	1	2
0	0	$-n$	0
	$-n$	0	0
	$n$	$n$	0

pri čemer je  $n$  poljubno celo število.

**PRIMER 16.** Za paletu  $P = \mathbb{Z}_4$  in grupo  $A = \mathbb{Z}_4$  je ena od možnih funkcij  $\varphi(x, y, u)$  podana z razpredelnicami (dobljene so z reševanjem sistema linearnih enačb v kolobarju  $\mathbb{Z}_4$ ):

$x = 0$ :

$y \setminus u$	0	1	2	3
0	0	2	2	0
1	1	0	3	2
2	2	2	0	0
3	0	2	2	0

$x = 1$ :

$y \setminus u$	0	1	2	3
0	0	3	1	2
1	2	0	2	0
2	1	2	0	3
3	2	2	0	0

$x = 2$ :

$y \setminus u$	0	1	2	3
0	0	2	2	0
1	1	0	3	2
2	2	2	0	0
3	0	2	2	0

$x = 3$ :

$y \setminus u$	0	1	2	3
0	0	3	1	2
1	0	0	2	2
2	1	2	0	3
3	2	0	2	0

**PRIMER 17.** Pri paleti  $P = \mathbb{Z}_2[t]/(t^2 + t + 1)$  in isti grupi  $A = \mathbb{Z}_2[t]/(t^2 + t + 1)$  je ena od takih funkcij polinom

$$\varphi(x, y, u) = (y + u)(tx^2 + sxy + y^2).$$

Razlaga: za kohomologijo klap  $H^3(P, A)$  so 3-koverige polinomi treh spremenljivk, kodiferencial je dan s predpisom:

$$\delta(\varphi)(x, y, u, v) = \varphi(x, u, v) - \varphi(x, y, v) + \varphi(x, y, u) - \varphi(x * y, u, v) + \\ + \varphi(x * u, y * u, v) - \varphi(x * v, y * v, u * v)$$

Torej je iskana funkcija  $\varphi$  ravno 3-kocikel. Polinom

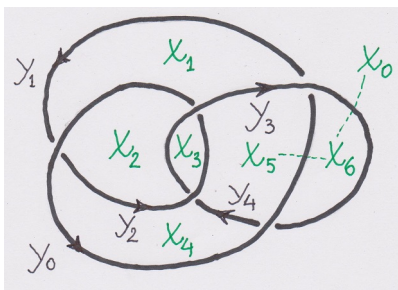
$$(y + u)(tx^2 + sxy + y^2)$$

je eden izmed kociklov iz članka T. Mochizuki, *The 3-cocycles of the Alexander quandles  $\mathbb{F}_q[T]/(T - \omega)$* , *Algebr. Geom. Topol.* **5** (2005), 183 - 205.

**PRIMER 18.** *Po novi metodi - z barvanjem vej in lic, poskusimo ugotoviti, ali sta spleta vozlov  $1_1$  in  $3_3$  iz 14. primera ambientno izotopna.*

Na diagramu spleta, ki pripada vozlu  $1_1$ , so lica  $x_0, x_1, x_2, x_3, x_4$  in  $x_5$ . Vsota Boltzmannovih uteži je enaka

$$\varphi(x_0, y_1, y_0) + \varphi(x_5, y_2, y_3) + \varphi(x_6, y_0, y_3) + \\ + \varphi(x_5, y_4, y_2) + \varphi(x_6, y_3, y_0). (*)$$



V 14. primeru smo našli dvoparametrični izraz:

$$y_1 = 3y_0 + 2y_3, y_2 = 3y_0 + 2y_3, y_4 = 2y_0 + 3y_3.$$

Iz slike preberemo še, da je

$$x_6 = x_0 * y_3 = 3x_0 + 2y_3, x_5 = x_6 * y_0 = x_0 + 2y_0 + 2y_3$$

pri poljubnih  $x_0, y_0$  in  $y_3$ . Imamo triparametrično družino, torej  $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$  skupnih barvanj vej in lic. Za vsako barvanje izračunajmo težo po formuli (\*). Rezultati so v naslednji razpredelnici:

run:

- 1)  $x_0 = 0, y_0 = 0, y_3 = 0, teža = 0$
- 2)  $x_0 = 0, y_0 = 0, y_3 = 1, teža = 1$
- 3)  $x_0 = 0, y_0 = 0, y_3 = 2, teža = 0$
- 4)  $x_0 = 0, y_0 = 0, y_3 = 3, teža = 1$
- 5)  $x_0 = 0, y_0 = 1, y_3 = 0, teža = 1$
- 6)  $x_0 = 0, y_0 = 1, y_3 = 1, teža = 0$
- 7)  $x_0 = 0, y_0 = 1, y_3 = 2, teža = 1$
- 8)  $x_0 = 0, y_0 = 1, y_3 = 3, teža = 0$
- 9)  $x_0 = 0, y_0 = 2, y_3 = 0, teža = 0$
- 10)  $x_0 = 0, y_0 = 2, y_3 = 1, teža = 1$
- 11)  $x_0 = 0, y_0 = 2, y_3 = 2, teža = 0$
- 12)  $x_0 = 0, y_0 = 2, y_3 = 3, teža = 1$
- 13)  $x_0 = 0, y_0 = 3, y_3 = 0, teža = 1$
- 14)  $x_0 = 0, y_0 = 3, y_3 = 1, teža = 0$
- 15)  $x_0 = 0, y_0 = 3, y_3 = 2, teža = 1$
- 16)  $x_0 = 0, y_0 = 3, y_3 = 3, teža = 0$
- 17)  $x_0 = 1, y_0 = 0, y_3 = 0, teža = 0$
- 18)  $x_0 = 1, y_0 = 0, y_3 = 1, teža = 2$
- 19)  $x_0 = 1, y_0 = 0, y_3 = 2, teža = 0$
- 20)  $x_0 = 1, y_0 = 0, y_3 = 3, teža = 2$
- 21)  $x_0 = 1, y_0 = 1, y_3 = 0, teža = 2$
- 22)  $x_0 = 1, y_0 = 1, y_3 = 1, teža = 0$
- 23)  $x_0 = 1, y_0 = 1, y_3 = 2, teža = 2$
- 24)  $x_0 = 1, y_0 = 1, y_3 = 3, teža = 0$
- 25)  $x_0 = 1, y_0 = 2, y_3 = 0, teža = 0$
- 26)  $x_0 = 1, y_0 = 2, y_3 = 1, teža = 2$
- 27)  $x_0 = 1, y_0 = 2, y_3 = 2, teža = 0$
- 28)  $x_0 = 1, y_0 = 2, y_3 = 3, teža = 2$
- 29)  $x_0 = 1, y_0 = 3, y_3 = 0, teža = 2$
- 30)  $x_0 = 1, y_0 = 3, y_3 = 1, teža = 0$
- 31)  $x_0 = 1, y_0 = 3, y_3 = 2, teža = 2$
- 32)  $x_0 = 1, y_0 = 3, y_3 = 3, teža = 0$
- 33)  $x_0 = 2, y_0 = 0, y_3 = 0, teža = 0$
- 34)  $x_0 = 2, y_0 = 0, y_3 = 1, teža = 1$

- 35)  $x_0 = 2, y_0 = 0, y_3 = 2, teža = 0$
- 36)  $x_0 = 2, y_0 = 0, y_3 = 3, teža = 1$
- 37)  $x_0 = 2, y_0 = 1, y_3 = 0, teža = 1$
- 38)  $x_0 = 2, y_0 = 1, y_3 = 1, teža = 0$
- 39)  $x_0 = 2, y_0 = 1, y_3 = 2, teža = 1$
- 40)  $x_0 = 2, y_0 = 1, y_3 = 3, teža = 0$
- 41)  $x_0 = 2, y_0 = 2, y_3 = 0, teža = 0$
- 42)  $x_0 = 2, y_0 = 2, y_3 = 1, teža = 1$
- 43)  $x_0 = 2, y_0 = 2, y_3 = 2, teža = 0$
- 44)  $x_0 = 2, y_0 = 2, y_3 = 3, teža = 1$
- 45)  $x_0 = 2, y_0 = 3, y_3 = 0, teža = 1$
- 46)  $x_0 = 2, y_0 = 3, y_3 = 1, teža = 0$
- 47)  $x_0 = 2, y_0 = 3, y_3 = 2, teža = 1$
- 48)  $x_0 = 2, y_0 = 3, y_3 = 3, teža = 0$
- 49)  $x_0 = 3, y_0 = 0, y_3 = 0, teža = 0$
- 50)  $x_0 = 3, y_0 = 0, y_3 = 1, teža = 2$
- 51)  $x_0 = 3, y_0 = 0, y_3 = 2, teža = 0$
- 52)  $x_0 = 3, y_0 = 0, y_3 = 3, teža = 2$
- 53)  $x_0 = 3, y_0 = 1, y_3 = 0, teža = 2$
- 54)  $x_0 = 3, y_0 = 1, y_3 = 1, teža = 0$
- 55)  $x_0 = 3, y_0 = 1, y_3 = 2, teža = 2$
- 56)  $x_0 = 3, y_0 = 1, y_3 = 3, teža = 0$
- 57)  $x_0 = 3, y_0 = 2, y_3 = 0, teža = 0$
- 58)  $x_0 = 3, y_0 = 2, y_3 = 1, teža = 2$
- 59)  $x_0 = 3, y_0 = 2, y_3 = 2, teža = 0$
- 60)  $x_0 = 3, y_0 = 2, y_3 = 3, teža = 2$
- 61)  $x_0 = 3, y_0 = 3, y_3 = 0, teža = 2$
- 62)  $x_0 = 3, y_0 = 3, y_3 = 1, teža = 0$
- 63)  $x_0 = 3, y_0 = 3, y_3 = 2, teža = 2$
- 64)  $x_0 = 3, y_0 = 3, y_3 = 3, teža = 0$

Težo 0 ima 32 barvanj, težo 1 ima 16 barvanj, težo 2 ima 16 barvanj  
in težo 3 ima 0 barvanj.

BUILD SUCCESSFUL (total time: 0 seconds)

Splet vozla  $1_1$  ima naslednje frekvence barvanj:

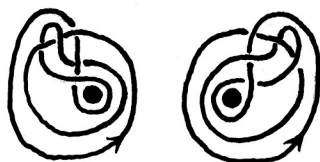
teže	0	1	2	3
frekvence	32	16	16	0

Na enak način se dobijo pri spletu vozla  $3_3$  naslednje frekvence:

teže	0	1	2	3
frekvence	48	16	0	0

Dokazali smo, da vozla  $1_1$  in  $3_3$  nista ambientno izotopna.

Končno še vozla  $5_{26}$  in  $5_{27}$ . Ali sta ambientno izotopna?



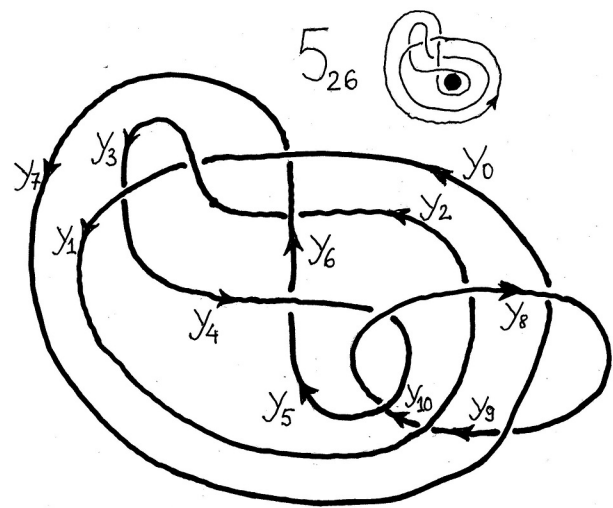
Iz zgornjega primera povzemimo postopek za računanje teže vseh barvanj vej in lic:

- (1) Iz diagrama preberemo relacije med barvami vej.
- (2) Poiščemo tako paletu, da bodo obstajala tudi nekonstantna barvanja vej.
- (3) Vsa mogoča barvanja vej izrazimo z nekaj neodvisnimi neznankami.  
Pri tem izhajamo iz relacij.
- (4) Pri danem barvanju vej obarvamo še lica po pravilu
 
$$x * y \overset{y}{\uparrow} x$$
- (5) Izberemo si Abelovo grupo  $A$  in pri dani paleti  $P$  poiščemo tako funkcijo  $\varphi : P \times P \times P \rightarrow A$ , da bo:
  - $\varphi(x, y, u) = 0$ , kadar je  $u = y$  in
  - $\varphi(x, u, v) - \varphi(x, y, v) + \varphi(x, y, u) - \varphi(x * y, u, v) + \varphi(x * u, y * u, v) - \varphi(x * v, y * v, u * v) = 0$  za  $x, y, u$  in  $v \in P$ .
- (6) Pri danem barvanju vej in lic izračunamo v vsakem križišču Boltzmannovo utež
 
$$\psi(x, y, u, z) = z \cdot \varphi(x, y, u),$$
 pri čemer je  $x$  barva lica,  $y$  barva desnega podvoza,  $u$  barva nadvoza in  $z$  znak križišča. Nato seštejemo uteži vseh križišč in dobimo *težo* danega barvanja.



(1) Iz diagrama orientiranega vozla ali spleta preberemo relacije med barvami vej.

Začnimo z vozlom  $5_{26}$ .



- |                   |                      |
|-------------------|----------------------|
| $y_3 * y_1 = y_4$ | $y_1 * y_8 = y_2$    |
| $y_0 * y_3 = y_1$ | $y_7 * y_8 = y_0$    |
| $y_7 * y_0 = y_6$ | $y_{10} * y_5 = y_8$ |
| $y_2 * y_6 = y_3$ | $y_9 * y_1 = y_{10}$ |
| $y_5 * y_4 = y_6$ | $y_8 * y_7 = y_9$    |
| $y_5 * y_8 = y_4$ |                      |

(2) Poiščemo tako paleto, da bodo obstajala tudi nekonstantna barvanja vej.

Najprej poskusimo – kot v vseh prejšnjih primerih – ali pri paleti  $\mathbb{Z}$  obstajajo nekonstantna barvanja. V paleti  $\mathbb{Z}$  je  $a * b = 2b - a$ . Iz relacij med barvami vej dobimo sistem enačb:

$$\begin{array}{ll}
 2y_1 - y_3 = y_4 & \bullet & 2y_8 - y_1 = y_2 \\
 2y_3 - y_0 = y_1 & & 2y_8 - y_7 = y_0 \\
 2y_0 - y_7 = y_6 & \bullet & 2y_5 - y_{10} = y_8 \\
 2y_6 - y_2 = y_3 & \bullet & 2y_1 - y_9 = y_{10} \bullet \\
 2y_4 - y_5 = y_6 & & 2y_7 - y_8 = y_9 \bullet \\
 2y_8 - y_5 = y_4 & \bullet & 
 \end{array}$$

S pomočjo označenih enačb izrazimo vse ostale neznanke z neznankami  $y_1, y_4$  in  $y_8$ :

$$\begin{array}{ll}
 y_3 = 2y_1 - y_4 & y_0 = 3y_1 - 2y_4 \\
 y_5 = 2y_8 - y_4 & y_7 = 6y_1 - 7y_4 + 2y_8 \\
 y_6 = 3y_4 - 2y_8 & y_9 = 12y_1 - 14y_4 + 3y_8 \\
 y_2 = -2y_1 + 7y_4 - 4y_8 & y_{10} = -10y_1 + 14y_4 - 3y_8
 \end{array}$$

Iz neoznačenih enačb sledijo relacije

$$9(y_4 - y_1) = 0 \text{ in } 6(y_8 - y_4) = 0, (\star)$$

$$10y_1 - 16y_4 + 6y_8 = 0, (\star \star)$$

odkoder najprej sledi, da je  $y_4 = y_1$  in  $y_8 = y_1$ , iz zgornjih izrazov pa še:

$$y_3 = y_5 = y_6 = y_2 = y_0 = y_7 = y_9 = y_{10} = y_1.$$

Pri paleti  $\mathbb{Z}$  so *samo konstantna* barvanja.

Iz relacij  $(\star)$  se vidi, da nekonstantna barvanja obstajajo pri paletah  $\mathbb{Z}_3, \mathbb{Z}_6$  in  $\mathbb{Z}_9$ . Najprej vzemimo paleto  $\mathbb{Z}_3$ .

(3) Vsa mogoča barvanja vej izrazimo z nekaj neodvisnimi neznankami. Pri tem izhajamo iz relacij.

Obe relaciji

$$9(y_4 - y_1) = 0 \text{ in } 6(y_8 - y_4) = 0 \quad (\star)$$

odpadeta. Iz relacije

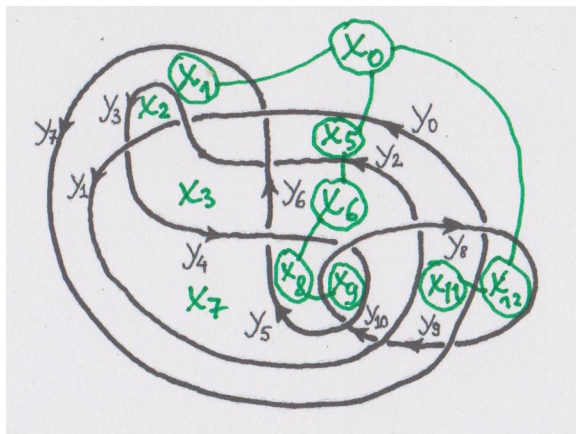
$$10y_1 - 16y_4 + 6y_8 = 0, \quad (\star \star)$$

sledi, da je  $y_4 = y_1$ , neznanki  $y_1$  in  $y_8$  sta neodvisni, vse ostale pa se izražajo z njima:

$$\begin{array}{ll} y_3 = y_4 \bar{*} y_1 & y_0 = y_1 \bar{*} y_3 \\ y_5 = y_4 \bar{*} y_8 & y_7 = y_6 \bar{*} y_0 \\ y_6 = y_5 * y_4 & y_9 = y_8 * y_7 \\ y_2 = y_3 \bar{*} y_6 & y_{10} = y_3 * y_1 \end{array}$$

(4) Pri danem barvanju vej obarvamo še lica po pravilu

$$x * y \overset{y}{\uparrow} x$$



Kasneje bomo videli, da so dovolj samo barve  $x_0, x_1, x_5, x_6, x_8, x_9, x_{11}$  in  $x_{12}$ .

Barva  $x_0$  je neodvisna, ostale se izražajo takole:

$$\begin{array}{ll} x_1 = x_0 * y_7 & x_5 = x_0 * y_0 \\ x_6 = x_5 * x_5 & x_8 = x_6 \bar{*} y_4 \\ x_9 = x_8 \bar{*} y_8 & x_{12} = x_0 \bar{*} y_8 \\ x_{11} = x_{12} * y_7 & \end{array}$$

Ugotovili smo že, da se neznanke  $y_0, y_2, \dots, y_{10}$  izražajo z dvema neodvisnima neznankama  $y_1$  in  $y_8$ . Neznanke  $x_1, x_2, \dots, x_{12}$  pa razen s tema dvema izražajo še z neodvisno neznanko  $x_0$ . Vsega skupaj je  $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$  barvanj vej in lic.

(5) Izberemo si Abelovo grupo  $A$  in pri dani paleti  $P$  poiščemo tako funkcijo  $\varphi : P \times P \times P \rightarrow A$ , da bo:

- $\varphi(x, y, u) = 0$ , kadar je  $u = y$  in
- $\varphi(x, u, v) - \varphi(x, y, v) + \varphi(x, y, u) -$   
 $-\varphi(x * y, u, v) + \varphi(x * u, y * u, v) -$   
 $-\varphi(x * v, y * v, u * v) = 0$  za  $x, y, u$  in  $v \in P$ .

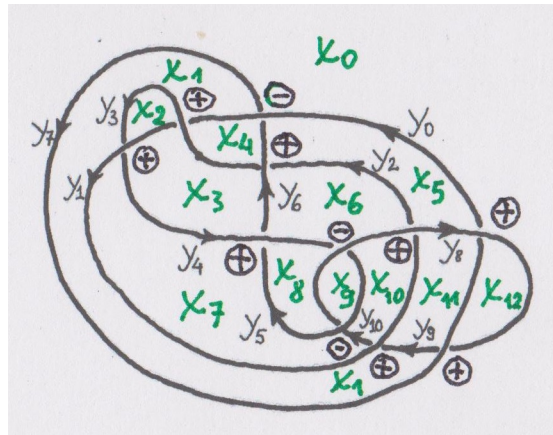
Za paletu smo si izbrali  $P = \mathbb{Z}_3$ , za grupo si izberimo  $A = \mathbb{Z}$  in vzemimo funkcijo  $\varphi_n(x, y, u)$  iz 15. primera pri  $n = 1$ . Pri vseh  $x \in \{0, 1, 2\}$  so njene vrednosti dane v tabeli:

$y \setminus u$	0	1	2
0	0	-1	0
1	-1	0	0
2	1	1	0

(6) Pri danem barvanju vej in lic izračunamo v vsakem križišču Boltzmannovo utež

$$\psi(x, y, u, z) = z \cdot \varphi(x, y, u),$$

pri čemer je  $x$  barva lica,  $y$  barva desnega podvoza,  $u$  barva nadvoza in  $z$  znak križišča.



$$\begin{aligned} \text{teža} = & \varphi(x_1, y_0, y_3) - \varphi(x_0, y_7, y_0) + \\ & + \varphi(x_1, y_3, y_1) + \varphi(x_5, y_2, y_6) + \varphi(x_8, y_5, y_4) - \\ & - \varphi(x_9, y_5, y_8) + \varphi(x_{11}, y_1, y_8) + \varphi(x_{12}, y_7, y_8) - \\ & - \varphi(x_9, y_8, y_5) + \varphi(x_{11}, y_9, y_1) + \varphi(x_{12}, y_8, y_7) \end{aligned}$$

Teže pri vseh možnih variacijah neodvisnih neznank  $x_0$ ,  $y_1$  in  $y_8$ :

run:

- 1)  $x_0 = 0, y_1 = 0, y_8 = 0, teža = 0$
- 2)  $x_0 = 0, y_1 = 0, y_8 = 1, teža = 0$
- 3)  $x_0 = 0, y_1 = 0, y_8 = 2, teža = 0$
- 4)  $x_0 = 0, y_1 = 1, y_8 = 0, teža = 0$
- 5)  $x_0 = 0, y_1 = 1, y_8 = 1, teža = 0$
- 6)  $x_0 = 0, y_1 = 1, y_8 = 2, teža = 0$
- 7)  $x_0 = 0, y_1 = 2, y_8 = 0, teža = 0$
- 8)  $x_0 = 0, y_1 = 2, y_8 = 1, teža = 0$
- 9)  $x_0 = 0, y_1 = 2, y_8 = 2, teža = 0$
- 10)  $x_0 = 1, y_1 = 0, y_8 = 0, teža = 0$
- 11)  $x_0 = 1, y_1 = 0, y_8 = 1, teža = 0$
- 12)  $x_0 = 1, y_1 = 0, y_8 = 2, teža = 0$
- 13)  $x_0 = 1, y_1 = 1, y_8 = 0, teža = 0$
- 14)  $x_0 = 1, y_1 = 1, y_8 = 1, teža = 0$
- 15)  $x_0 = 1, y_1 = 1, y_8 = 2, teža = 0$
- 16)  $x_0 = 1, y_1 = 2, y_8 = 0, teža = 0$
- 17)  $x_0 = 1, y_1 = 2, y_8 = 1, teža = 0$
- 18)  $x_0 = 1, y_1 = 2, y_8 = 2, teža = 0$
- 19)  $x_0 = 2, y_1 = 0, y_8 = 0, teža = 0$
- 20)  $x_0 = 2, y_1 = 0, y_8 = 1, teža = 0$
- 21)  $x_0 = 2, y_1 = 0, y_8 = 2, teža = 0$
- 22)  $x_0 = 2, y_1 = 1, y_8 = 0, teža = 0$
- 23)  $x_0 = 2, y_1 = 1, y_8 = 1, teža = 0$
- 24)  $x_0 = 2, y_1 = 1, y_8 = 2, teža = 0$
- 25)  $x_0 = 2, y_1 = 2, y_8 = 0, teža = 0$
- 26)  $x_0 = 2, y_1 = 2, y_8 = 1, teža = 0$
- 27)  $x_0 = 2, y_1 = 2, y_8 = 2, teža = 0$

Težo 0 ima 27 barvanj, težo 1 ima 0 barvanj, težo 2 ima 0 barvanj, Težo 3 ima 0 barvanj, težo 4 ima 0 barvanj, težo 5 ima 0 barvanj, Težo 6 ima 0 barvanj, težo 7 ima 0 barvanj, težo 8 ima 0 barvanj, Težo 9 ima 0 barvanj,  
BUILD SUCCESSFUL (total time: 0 seconds)

Po enakem postopku dobimo za vozle 5<sub>27</sub> enako tabelo – vsa barvanja imajo težo 0.

Paleta  $\mathbb{Z}_3$  je preskromna - z njo nismo mogli dokazati, da vozla nista ambientno izotopna.

Spet smo pri 2. točki postopka – pri iskanju primernejše palete.

(2) Poiščemo tako paleto, da bodo obstajala tudi nekonstantna barvanja vej.

Spet začnimo z relacijami med barvami vej:

$$\begin{array}{ll} y_3 * y_1 = y_4 & y_1 * y_8 = y_2 \\ y_0 * y_3 = y_1 & y_7 * y_8 = y_0 \\ y_7 * y_0 = y_6 & y_{10} * y_5 = y_8 \\ y_2 * y_6 = y_3 & y_9 * y_1 = y_{10} \\ y_5 * y_4 = y_6 & y_8 * y_7 = y_9 \\ y_5 * y_8 = y_4 & \end{array}$$

Poskusimo s paleto Laurentovih polinomov  $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ .

$$a(t) * b(t) = t \cdot a(t) + (1 - t) \cdot b(t).$$

Inverzna operacija je dana s predpisom

$$a * b = \frac{1}{t} \cdot a(t) + (1 - \frac{1}{t}) \cdot b(t).$$

Iz relacij sledi, da so neznanke  $y_1$ ,  $y_4$  in  $y_8$  neodvisne, ostale pa se izražajo z njimi:

$$\begin{aligned} y_3 &= \frac{(t-1)y_1 + y_4}{t} \\ y_5 &= \frac{y_4 + (t-1)y_8}{t} \\ &\vdots \\ y_0 &= \frac{(t^2 - t + 1)y_1 + (t-1)y_4}{t^2} \\ y_7 &= \frac{(t^3 - 2t^2 + 2t - 1)y_1 + (-t^3 + 3t^2 - 2t + 1)y_4 + (t^3 - t^2)y_8}{t^3} \end{aligned}$$

Iz relacije  $y_7 * y_8 = y_0$  sledi enačba

$$\frac{t^3 - 3t^2 + 3t - 2}{t^2} (y_1 - y_4) = 0 \quad (\star)$$

Odtod sledi:  $y_4 = y_1$  in naprej, da je  $y_5 = y_1, \dots$  vse neznanke so enake  $y_1$ . Pri paleti  $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$  so samo konstantna barvanja.

Iz enačbe ( $\star$ ) sledi, da obstajajo nekonstantna barvanja pri klapi  $\mathbb{Z}[t]/h(t)$ , kjer je bodisi

$h(t) = t^3 - 3t^2 + 3t - 2$  bodisi je  $h(t)$  kakšen delitelj tega polinoma.

$$t^3 - 3t^2 + 3t - 2 = (t^2 - t + 1)(t - 2)$$

Za paleto  $P$  vzemimo klapo

$$\mathbb{Z}_2[t]/(t^2 - t + 1) = \mathbb{Z}_2[t]/(t^2 + t + 1).$$

Elementi te klape so  $\{0, 1, t, s := t + 1\}$ . Klapni operaciji:

$$a * b = ta + sb, \quad a \bar{*} b = sa + tb$$

Za seštevanje in množenje po modulu je ta klapa obseg:

$$\begin{aligned} 1 + 1 = t + t = s + s = 0, \quad t + 1 = s, \quad s + 1 = t, \quad s + t = 1 \\ st = 1, \quad s^2 = t, \quad t^2 = s \end{aligned}$$

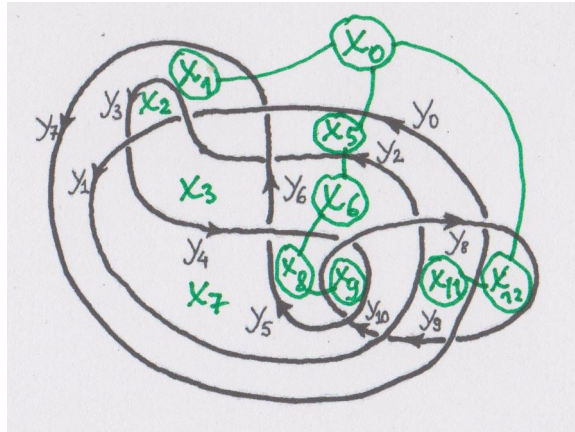
(3) Vsa mogoča barvanja vej izrazimo z nekaj neodvisnimi neznankami. Pri tem izhajamo iz relacij.

Iz relacij med barvami vej sledi, da sta neznanki  $y_1$  in  $y_4$  neodvisni, ostale pa se izražajo z njima:

$$\begin{aligned} y_3 &= ty_1 + sy_4 & y_5 &= sy_1 + ty_4 \\ y_6 &= y_1 & y_2 &= sy_1 + ty_4 \\ y_0 &= y_4 & y_7 &= sy_1 + ty_4 \\ y_9 &= y_1 & y_{10} &= y_1 \\ y_8 &= ty_1 + sy_4 \end{aligned}$$

(4) Pri danem barvanju vej obarvamo še lica po pravilu

$$x * y \overset{y}{\uparrow} x$$



Kasneje bomo videli, da so dovolj samo barve  $x_0, x_1, x_5, x_6, x_8, x_9, x_{11}$  in  $x_{12}$ .

Barva  $x_0$  je neodvisna, ostale se izražajo takole:

$$\begin{aligned} x_1 &= x_0 * y_7 & x_5 &= x_0 * y_0 \\ x_6 &= x_5 * x_5 & x_8 &= x_6 * y_4 \\ x_9 &= x_8 * y_8 & x_{12} &= x_0 * y_8 \\ x_{11} &= x_{12} * y_7 \end{aligned}$$

Ugotovili smo že, da se neznanke  $y_0, y_2, \dots, y_{10}$  izražajo z dvema neodvisnima neznankama  $y_1$  in  $y_4$ . Neznanke  $x_1, x_2, \dots, x_{12}$  pa se razen s tema dvema izražajo še z neodvisno neznanko  $x_0$ . Vsega skupaj je  $4 \cdot 4 \cdot 4 = 64$  barvanj vej in lic.



(5) Izberemo si Abelovo grupo  $A$  in pri dani paleti  $P$  poiščemo tako funkcijo  $\varphi : P \times P \times P \rightarrow A$ , da bo:

- $\varphi(x, y, u) = 0$ , kadar je  $u = y$  in
- $\varphi(x, u, v) - \varphi(x, y, v) + \varphi(x, y, u) -$   
 $-\varphi(x * y, u, v) + \varphi(x * u, y * u, v) -$   
 $-\varphi(x * v, y * v, u * v) = 0$  za  $x, y, u$  in  $v \in P$ .

Pri paleti  $P = \mathbb{Z}_2[t]/(t^2 + t + 1)$  in isti grupi  $A = \mathbb{Z}_2[t]/(t^2 + t + 1)$  je ena od takih funkcij polinom

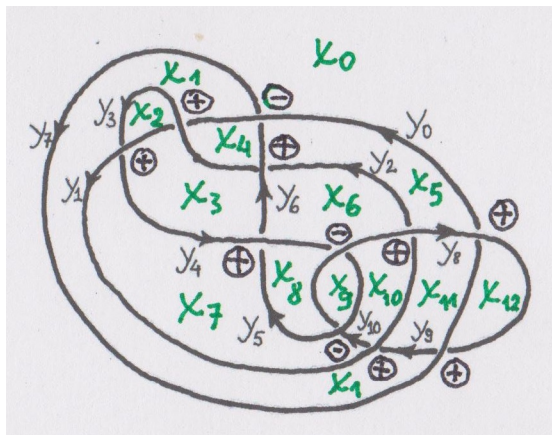
$$\varphi(x, y, u) = (y + u)(tx^2 + sxy + y^2).$$

iz 17. primera.

(6) Pri danem barvanju vej in lic izračunamo v vsakem križišču Boltzmannovo utež

$$\psi(x, y, u, z) = z \cdot \varphi(x, y, u),$$

pri čemer je  $x$  barva lica,  $y$  barva desnega podvoza,  $u$  barva nadvoza in  $z$  znak križišča. Nato seštejemo uteži vseh križišč in dobimo težo danega barvanja.



$$\begin{aligned} \text{teža} = & \varphi(x_1, y_0, y_3) - \varphi(x_0, y_7, y_0) + \\ & + \varphi(x_1, y_3, y_1) + \varphi(x_5, y_2, y_6) + \varphi(x_8, y_5, y_4) - \\ & - \varphi(x_9, y_5, y_8) + \varphi(x_{11}, y_1, y_8) + \varphi(x_{12}, y_7, y_8) - \\ & - \varphi(x_9, y_8, y_5) + \varphi(x_{11}, y_9, y_1) + \varphi(x_{12}, y_8, y_7) \end{aligned}$$

Teže pri vseh možnih variacijah neodvisnih neznank  $x_0$ ,  $y_1$  in  $y_4$ :

run:

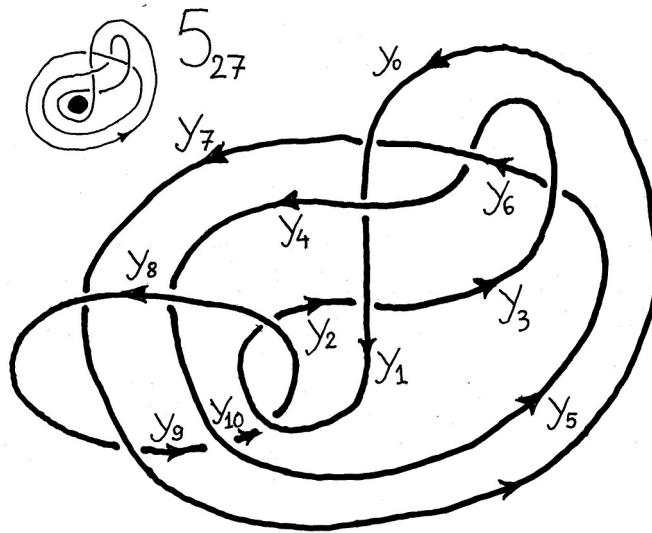
- 1)  $x_0 = 0, y_1 = 0, y_8 = 0, teža = 0$
- 2)  $x_0 = 0, y_1 = 0, y_8 = 1, teža = 0$
- 3)  $x_0 = 0, y_1 = 0, y_8 = t, teža = 0$
- 4)  $x_0 = 0, y_1 = 0, y_8 = s, teža = 0$
- 5)  $x_0 = 0, y_1 = 1, y_8 = 0, teža = 1$
- 6)  $x_0 = 0, y_1 = 1, y_8 = 1, teža = 0$
- 7)  $x_0 = 0, y_1 = 1, y_8 = t, teža = t$
- 8)  $x_0 = 0, y_1 = 1, y_8 = s, teža = s$
- 9)  $x_0 = 0, y_1 = t, y_8 = 0, teža = 1$
- 10)  $x_0 = 0, y_1 = t, y_8 = 1, teža = s$
- 11)  $x_0 = 0, y_1 = t, y_8 = t, teža = 0$
- 12)  $x_0 = 0, y_1 = t, y_8 = s, teža = t$
- 13)  $x_0 = 0, y_1 = s, y_8 = 0, teža = 1$
- 14)  $x_0 = 0, y_1 = s, y_8 = 1, teža = t$
- 15)  $x_0 = 0, y_1 = s, y_8 = t, teža = s$
- 16)  $x_0 = 0, y_1 = s, y_8 = s, teža = 0$
- 17)  $x_0 = 1, y_1 = 0, y_8 = 0, teža = 0$
- 18)  $x_0 = 1, y_1 = 0, y_8 = 1, teža = 0$
- 19)  $x_0 = 1, y_1 = 0, y_8 = t, teža = 0$
- 20)  $x_0 = 1, y_1 = 0, y_8 = s, teža = 0$
- 21)  $x_0 = 1, y_1 = 1, y_8 = 0, teža = 1$
- 22)  $x_0 = 1, y_1 = 1, y_8 = 1, teža = 0$
- 23)  $x_0 = 1, y_1 = 1, y_8 = t, teža = t$
- 24)  $x_0 = 1, y_1 = 1, y_8 = s, teža = s$
- 25)  $x_0 = 1, y_1 = t, y_8 = 0, teža = 1$
- 26)  $x_0 = 1, y_1 = t, y_8 = 1, teža = s$
- 27)  $x_0 = 1, y_1 = t, y_8 = t, teža = 0$
- 28)  $x_0 = 1, y_1 = t, y_8 = s, teža = t$
- 29)  $x_0 = 1, y_1 = s, y_8 = 0, teža = 1$
- 30)  $x_0 = 1, y_1 = s, y_8 = 1, teža = t$
- 31)  $x_0 = 1, y_1 = s, y_8 = t, teža = s$
- 32)  $x_0 = 1, y_1 = s, y_8 = s, teža = 0$
- 33)  $x_0 = t, y_1 = 0, y_8 = 0, teža = 0$
- 34)  $x_0 = t, y_1 = 0, y_8 = 1, teža = 0$
- 35)  $x_0 = t, y_1 = 0, y_8 = t, teža = 0$

- 36)  $x_0 = t, y_1 = 0, y_8 = s, teža = 0$
- 37)  $x_0 = t, y_1 = 1, y_8 = 0, teža = 1$
- 38)  $x_0 = t, y_1 = 1, y_8 = 1, teža = 0$
- 39)  $x_0 = t, y_1 = 1, y_8 = t, teža = t$
- 40)  $x_0 = t, y_1 = 1, y_8 = s, teža = s$
- 41)  $x_0 = t, y_1 = t, y_8 = 0, teža = 1$
- 42)  $x_0 = t, y_1 = t, y_8 = 1, teža = s$
- 43)  $x_0 = t, y_1 = t, y_8 = t, teža = 0$
- 44)  $x_0 = t, y_1 = t, y_8 = s, teža = t$
- 45)  $x_0 = t, y_1 = s, y_8 = 0, teža = 1$
- 46)  $x_0 = t, y_1 = s, y_8 = 1, teža = t$
- 47)  $x_0 = t, y_1 = s, y_8 = t, teža = s$
- 48)  $x_0 = t, y_1 = s, y_8 = s, teža = 0$
- 49)  $x_0 = s, y_1 = 0, y_8 = 0, teža = 0$
- 50)  $x_0 = s, y_1 = 0, y_8 = 1, teža = 0$
- 51)  $x_0 = s, y_1 = 0, y_8 = t, teža = 0$
- 52)  $x_0 = s, y_1 = 0, y_8 = s, teža = 0$
- 53)  $x_0 = s, y_1 = 1, y_8 = 0, teža = 1$
- 54)  $x_0 = s, y_1 = 1, y_8 = 1, teža = 0$
- 55)  $x_0 = s, y_1 = 1, y_8 = t, teža = t$
- 56)  $x_0 = s, y_1 = 1, y_8 = s, teža = s$
- 57)  $x_0 = s, y_1 = t, y_8 = 0, teža = 1$
- 58)  $x_0 = s, y_1 = t, y_8 = 1, teža = s$
- 59)  $x_0 = s, y_1 = t, y_8 = t, teža = 0$
- 60)  $x_0 = s, y_1 = t, y_8 = s, teža = t$
- 61)  $x_0 = s, y_1 = s, y_8 = 0, teža = 1$
- 62)  $x_0 = s, y_1 = s, y_8 = 1, teža = t$
- 63)  $x_0 = s, y_1 = s, y_8 = t, teža = s$
- 64)  $x_0 = s, y_1 = s, y_8 = s, teža = 0$

Težo 0 ima 28 barvanj, težo 1 ima 12 barvanj, težo t ima 12 barvanj, in težo s ima 12 barvanj.

BUILD SUCCESSFUL (total time: 0 seconds)

Po istem postopku izračunamo teže vseh možnih barvanj vozla  $5_{27}$ .



Teže pri vseh možnih variacijah neznank  $x_0$ ,  $y_1$  in  $y_8$ :

run:

- 1)  $x_0 = 0, y_1 = 0, y_8 = 0, teža = 0$
- 2)  $x_0 = 0, y_1 = 0, y_8 = 1, teža = s$
- 3)  $x_0 = 0, y_1 = 0, y_8 = t, teža = s$
- 4)  $x_0 = 0, y_1 = 0, y_8 = s, teža = s$
- 5)  $x_0 = 0, y_1 = 1, y_8 = 0, teža = s$
- 6)  $x_0 = 0, y_1 = 1, y_8 = 1, teža = 0$
- 7)  $x_0 = 0, y_1 = 1, y_8 = t, teža = s$
- 8)  $x_0 = 0, y_1 = 1, y_8 = s, teža = s$
- 9)  $x_0 = 0, y_1 = t, y_8 = 0, teža = s$
- 10)  $x_0 = 0, y_1 = t, y_8 = 1, teža = s$
- 11)  $x_0 = 0, y_1 = t, y_8 = t, teža = 0$
- 12)  $x_0 = 0, y_1 = t, y_8 = s, teža = s$
- 13)  $x_0 = 0, y_1 = s, y_8 = 0, teža = s$
- 14)  $x_0 = 0, y_1 = s, y_8 = 1, teža = s$
- 15)  $x_0 = 0, y_1 = s, y_8 = t, teža = s$
- 16)  $x_0 = 0, y_1 = s, y_8 = s, teža = 0$
- 17)  $x_0 = 1, y_1 = 0, y_8 = 0, teža = 0$
- 18)  $x_0 = 1, y_1 = 0, y_8 = 1, teža = s$
- 19)  $x_0 = 1, y_1 = 0, y_8 = t, teža = s$
- 20)  $x_0 = 1, y_1 = 0, y_8 = s, teža = s$
- 21)  $x_0 = 1, y_1 = 1, y_8 = 0, teža = s$
- 22)  $x_0 = 1, y_1 = 1, y_8 = 1, teža = 0$
- 23)  $x_0 = 1, y_1 = 1, y_8 = t, teža = s$
- 24)  $x_0 = 1, y_1 = 1, y_8 = s, teža = s$
- 25)  $x_0 = 1, y_1 = t, y_8 = 0, teža = s$
- 26)  $x_0 = 1, y_1 = t, y_8 = 1, teža = s$
- 27)  $x_0 = 1, y_1 = t, y_8 = t, teža = 0$
- 28)  $x_0 = 1, y_1 = t, y_8 = s, teža = s$
- 29)  $x_0 = 1, y_1 = s, y_8 = 0, teža = s$
- 30)  $x_0 = 1, y_1 = s, y_8 = 1, teža = s$
- 31)  $x_0 = 1, y_1 = s, y_8 = t, teža = s$
- 32)  $x_0 = 1, y_1 = s, y_8 = s, teža = 0$
- 33)  $x_0 = t, y_1 = 0, y_8 = 0, teža = 0$
- 34)  $x_0 = t, y_1 = 0, y_8 = 1, teža = s$
- 35)  $x_0 = t, y_1 = 0, y_8 = t, teža = s$

- 36)  $x_0 = t, y_1 = 0, y_8 = s, teža = s$
- 37)  $x_0 = t, y_1 = 1, y_8 = 0, teža = s$
- 38)  $x_0 = t, y_1 = 1, y_8 = 1, teža = 0$
- 39)  $x_0 = t, y_1 = 1, y_8 = t, teža = s$
- 40)  $x_0 = t, y_1 = 1, y_8 = s, teža = s$
- 41)  $x_0 = t, y_1 = t, y_8 = 0, teža = s$
- 42)  $x_0 = t, y_1 = t, y_8 = 1, teža = s$
- 43)  $x_0 = t, y_1 = t, y_8 = t, teža = 0$
- 44)  $x_0 = t, y_1 = t, y_8 = s, teža = s$
- 45)  $x_0 = t, y_1 = s, y_8 = 0, teža = s$
- 46)  $x_0 = t, y_1 = s, y_8 = 1, teža = s$
- 47)  $x_0 = t, y_1 = s, y_8 = t, teža = s$
- 48)  $x_0 = t, y_1 = s, y_8 = s, teža = 0$
- 49)  $x_0 = s, y_1 = 0, y_8 = 0, teža = 0$
- 50)  $x_0 = s, y_1 = 0, y_8 = 1, teža = s$
- 51)  $x_0 = s, y_1 = 0, y_8 = t, teža = s$
- 52)  $x_0 = s, y_1 = 0, y_8 = s, teža = s$
- 53)  $x_0 = s, y_1 = 1, y_8 = 0, teža = s$
- 54)  $x_0 = s, y_1 = 1, y_8 = 1, teža = 0$
- 55)  $x_0 = s, y_1 = 1, y_8 = t, teža = s$
- 56)  $x_0 = s, y_1 = 1, y_8 = s, teža = s$
- 57)  $x_0 = s, y_1 = t, y_8 = 0, teža = s$
- 58)  $x_0 = s, y_1 = t, y_8 = 1, teža = s$
- 59)  $x_0 = s, y_1 = t, y_8 = t, teža = 0$
- 60)  $x_0 = s, y_1 = t, y_8 = s, teža = s$
- 61)  $x_0 = s, y_1 = s, y_8 = 0, teža = s$
- 62)  $x_0 = s, y_1 = s, y_8 = 1, teža = s$
- 63)  $x_0 = s, y_1 = s, y_8 = t, teža = s$
- 64)  $x_0 = s, y_1 = s, y_8 = s, teža = 0$

Težo 0 ima 16 barvanj, težo 1 ima 0 barvanj, težo t ima 0 barvanj, in težo s ima 48 barvanj. BUILD SUCCESSFUL (total time: 0 seconds)

Splet vozla  $5_{26}$  ima naslednje frekvence barvanj:

teže	0	1	t	s
frekvence	28	12	12	12

Splet vozla  $5_{27}$  ima naslednje frekvence:

teže	0	1	t	s
frekvence	16	0	0	48

Dokazali smo, da vozla  $5_{26}$  in  $5_{27}$  nista ambientno izotopna.

**PRIMER 19.** Še primer zelo učinkovite palete.

V vsaki grupi  $G$  lahko definiramo klapno operacijo s konjugiranjem:

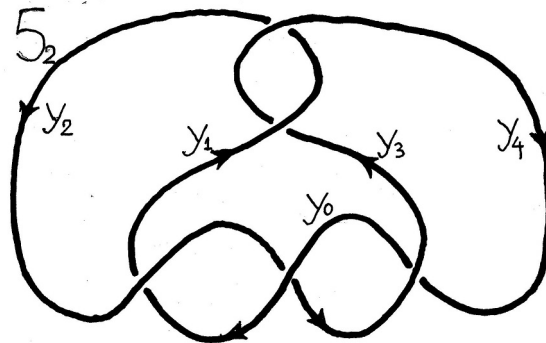
$$g * h = h^{-1}gh.$$

Projektivna specialna linearna grupa  $PSL(2, \mathbb{C})$  je množica matrik tipa  $2 \times 2$  s kompleksnimi elementi, množenjem kot grupno operacijo in determinanto enako 1.

Parabolični elementi te grupe so matrike, ki imajo sled enako  $\pm 2$ . Ker se pri konjugiranju matrike sled ne spremeni, je množica  $P \subset PSL(2, \mathbb{C})$  vseh paraboličnih elementov klapa za zgornjo operacijo  $*$ .

**IZREK** (A. Inoue, Y. Kabaya, 2013). Pri klapi  $P$  in aditivni grupi  $A = \mathbb{C}/\pi^2\mathbb{Z}$  obstaja tak 3-kocikel  $\varphi : P \times P \times P \rightarrow A$ , da je za hiperbolični vozle ali splet teža kateregakoli nekonstantnega barvanja enaka kompleksnemu hiperboličnemu volumnu tega vozla ali spleta.

Vozel  $5_2$ :



Relacije med barvami vej:

$$\begin{array}{ll}
 y_1 * y_4 = y_2 & y_3 * y_1 = y_4 \\
 \bullet y_0 * y_2 = y_1 & \bullet y_2 * y_0 = y_3 \\
 \bullet y_4 * y_3 = y_0 &
 \end{array}$$



Iz dejstva, da je determinanta parabolične matrike enaka 1, sledi pa  $\pm 2$ , hitro sledi, da se da vsaka parabolična matrika  $p$  izraziti z dvema kompleksnima parametroma  $p_1$  in  $p_2$  v obliki:

$$\pm \begin{bmatrix} (1 + p_1 p_2) & p_2^2 \\ -p_1^2 & (1 - p_1 p_2) \end{bmatrix} \text{ ali skrajšano } \pm \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}.$$

Da se preveriti, da se formula  $p * q = q^{-1} p q$  v stolpcih izraža takole:

$$\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 + q_1 q_2) & -q_1^2 \\ q_2^2 & (1 - q_1 q_2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \end{bmatrix}$$

Neznanki  $y_0$  in  $y_3$  sta lahko neodvisni, naj bo na primer

$$y_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ in } y_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ t \end{bmatrix},$$

kjer je  $t$  za zdaj še neznan. S pomočjo označenih relacij na prejšnji strani izrazimo z neznankama  $y_0$  in  $y_3$  ostale neznanke:

$$y_2 = y_3 \bar{*} y_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix}$$

$$y_4 = y_0 \bar{*} y_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -t^2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -t^2 \end{bmatrix}$$

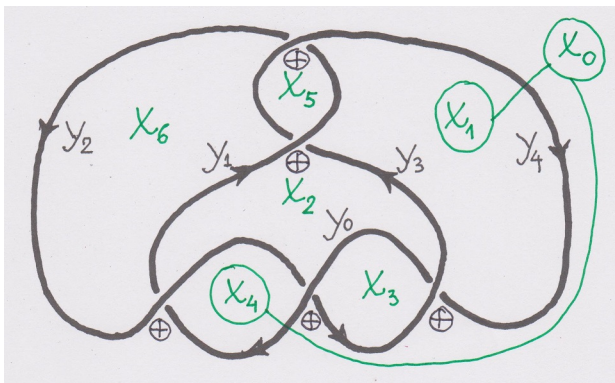
$$y_1 = y_0 * y_2 = \begin{bmatrix} 1 + t^2 & -t^2 \\ -t^2 & 1 - t^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 + t^2 \\ t^2 \end{bmatrix}$$

Iz preostalih dveh relacij  $y_1 * y_4 = y_2$  in  $y_3 * y_1 = y_4$  sledi enačba

$$t^5 + 2t^3 + t - 1 = 0,$$

ki ima rešitev  $t = 0,21508\dots - i \cdot 3,0174\dots$

Obarvajmo še lica:

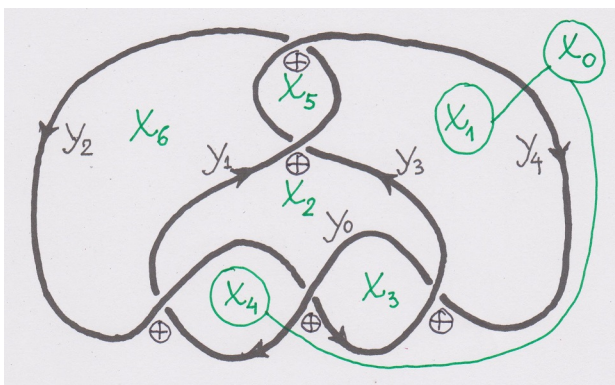


Izberimo si:

$$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Iz spodnje slike sledi:

$$x_0 = x_1 * y_4 = \begin{bmatrix} 1 - t^2 \\ t^4 \end{bmatrix} \text{ in } x_4 = x_0 * y_0 = \begin{bmatrix} t^4 - t^2 + 1 \\ t^4 \end{bmatrix}.$$



Teža tega barvanja je enaka

$$\varphi(x_1, y_1, y_4) + \varphi(x_1, y_3, y_1) + \varphi(x_4, y_0, y_2) + \varphi(x_4, y_2, y_0) + \varphi(x_1, y_4, y_3).$$

Ko pri 3-kociklu  $\varphi$  iz izreka izračunamo zgornje vrednosti, dobimo kompleksni volumen  $i(2,82812\dots + i \cdot 3,02412\dots)$  (realni hiperbolični volumen je enak  $2,82812\dots$ )